

## Rigidez dinámica de estribos de puentes

Antonio Martínez Cutillas  
Carlos Fernández Casado, S.L.

Enrique Alarcón Álvarez  
Departamento de Mecánica Estructural  
Universidad Politécnica de Madrid

### 1. INTRODUCCION

La Ingeniería Sísmica, como rama de la Ingeniería de Estructuras, desde sus comienzos ha concentrado sus esfuerzos en dotar a las edificaciones de la resistencia necesaria para evitar su colapso ante un terremoto "severo" y daños de importancia ante terremotos "menores", con el fin de salvaguardar al máximo la pérdida de vidas humanas. Prueba de ello es que la mayoría de la normativa nacional e internacional sobre acciones y construcción antisísmica vigentes se refieren a edificación, si se hace excepción de construcciones singulares, como las centrales nucleares, en las que un fallo estructural puede ocasionar daños irreparables. A medida que se ha progresado en los métodos de análisis, diseño y construcción, las edificaciones comienzan a tener, por lo general, un buen comportamiento frente al colapso total o parcial. Se desarrollan en paralelo estudios e investigaciones en otro tipo de estructuras que, si bien su fallo total o parcial no tienen una repercusión tan directa sobre las vidas humanas, sí lo pueden tener de forma indirecta por impedir la llegada de equipos de socorro, de suministros o la evacuación de víctimas, o bien pueden representar enormes pérdidas económicas por afectar al subsiguiente restablecimiento de las condiciones normales de vida: puentes, presas, servicios de gas, teléfono, agua...

En el caso de los puentes la repercusión indirecta sobre las pérdidas de vidas puede ser importante en el caso de localizaciones urbanas que puedan afectar la facilidad de evacuación o la llegada de socorros.

La revisión de los terremotos recientes constituye una herramienta de gran valor para el análisis del comportamiento de estas estructuras. Los terremotos de Niigata (Japón 1964) y Alaska (EEUU 1964) provocaron el colapso total de numerosos puentes, por la pérdida de coacción

lateral de los suelos granulares saturados por licuefacción. El Terremoto de San Fernando (EEUU 1971) trajo consigo la revisión de las recomendaciones sísmicas en materia de puentes, como consecuencia de los numerosos colapsos de Pasos Superiores de Autopista que se produjeron. La mayoría de estos colapsos se produjeron por caída de tramos isostáticos completos, ante la falta de suficiente longitud de entrega de los mismos en los puntos de apoyo. También se detectaron numerosos fallos como consecuencia de falta de precaución en detalles de armado, produciéndose fallos por esfuerzo cortante en pilares, por insuficiente capacidad de ductilidad para resistir los movimientos inelásticos alcanzados, así como fallos en la longitud de anclaje de las barras longitudinales al formarse las rótulas plásticas. El Terremoto de Loma Prieta (EEUU 1989) puso de manifiesto las deficiencias en puentes construidos con anterioridad a la existencia de recomendaciones sísmicas específicas para estas estructuras. La mayoría de las deficiencias se debieron a la falta de capacidad de ductilidad de secciones de hormigón claves para la seguridad global de la estructura.

El colapso del Cypress Viaduct, además de los aspectos anteriores ha puesto en evidencia la importancia de las condiciones locales de cimentación así como la variabilidad del movimiento sísmico en el espacio y su influencia en viaductos largos.

El análisis sísmico de los puentes no difiere, en gran medida, del de otras estructuras. La acción sísmica puede caracterizarse, dependiendo del alcance del estudio, por medio de los *Espectros de Respuesta*, *Funciones de Densidad Espectral* o por medio de *Acelerogramas*, según sea preciso obtener la respuesta máxima de la estructura, caracterizar la acción y la respuesta como un *Proceso Aleatorio*, o analizar el comportamiento a lo largo del tiempo.

Esta caracterización puede considerarse como local, en un punto determinado, sin considerar su posible variación a lo largo del espacio. Las diferencias entre las aceleraciones en los diferentes puntos de contacto del puente con el terreno, a lo largo de las distintas pilas y estribos, puede tener repercusión, no necesariamente desfavorable, en la respuesta de la estructura. Esta variación espacial de la acción está provocada por el efecto de propagación de ondas, por efecto de pérdida de coherencia, como consecuencia del carácter finito de la fuente sísmica, o por heterogeneidades locales del suelo en la superficie.

La modelización de la estructura se realiza por medio del Método de los Elementos Finitos. El rango de frecuencias de la acción sísmica hace que la discretización no quede condicionada por la resolución del problema dinámico sino más bien por el grado de detalle que quiera obtenerse en la respuesta estática. Deben obtenerse las propiedades de rigidez, inercia y amortiguamiento de los elementos que forman los puentes: tablero, aparatos de apoyo, pilas estribos y cimientos.

Los estribos y cimientos constituyen los elementos de contacto entre la estructura y el terreno y, por tanto, son los encargados de transmitir los movimientos derivados de la acción sísmica al resto de la estructura. En ellos se produce una *interacción* compleja, tanto a nivel estático como dinámico, entre el suelo y la estructura. Desde un punto de vista estático, dadas las rigideces relativas entre cimientos y pilas y el conjunto muro-cimiento de los estribos, se realiza la hipótesis de *empotramiento perfecto* entre las pilas y sus cimientos así como del conjunto tablero-apoyos con sus estribos. Esta hipótesis, desde el punto de vista de esfuerzos y tensiones, da lugar a dimensionamientos seguros porque acotan superiormente los esfuerzos máximos posibles en estos contactos. No sucede lo mismo desde el punto de vista de desplazamientos, que pueden verse infravalorados con esta hipótesis. Desde un punto de vista dinámico, la consideración de la hipótesis de empotramiento perfecto equivale a no considerar ninguna posible *interacción suelo-estructura*. En este caso, no puede realizarse ninguna afirmación con carácter general, ya que la respuesta de la estructura depende de sus características de rigidez, masa y amortiguamiento y, por otra parte, la presencia de la estructura puede alterar de forma significativa la acción.

Se han realizado interesantes estudios mediante modelos numéricos y analizando la respuesta real de las estructuras para evaluar la importancia de la interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica de los puentes.

Ma-Chi Chen y J. Penzien (1979) [7] estudian, por medio de elementos finitos bi y tridimensionales, en el dominio del tiempo, la influencia del suelo tras los estribos así como la interacción de las pilas con su cimiento, En los estribos y en la

cimentación de las pilas no se considera ningún tipo de contorno absorbente, ni elementos de disipación de energía por radiación. En el estudio se destaca la importancia de los empujes dinámicos en el estribo, del esvaje del tablero, la flexibilidad de la cimentación y la presencia del relleno en la transferencia de cargas entre pilas y estribos.

D. R. Somaini (1984) [24], J. P. Wolf (1985) [37] y Spyarakos (1990) [27], [28] realizan estudios en los que analizan los diferentes parámetros que intervienen en la interacción suelo-estructura de las pilas con sus cimientos, para el caso de puentes con luces pequeñas. El estudio se realiza sobre un modelo de tres grados de libertad, en el que se considera el amortiguamiento material en el suelo y la estructura, de tipo histerético, y el amortiguamiento por radiación, de tipo viscoso. Del mismo se deduce la influencia que los fenómenos de interacción tiene en el aumento de los períodos de vibración, del amortiguamiento y los desplazamientos de la estructura, así como en la reducción de esfuerzos.

E. Maragakis y P. C. Jennings (1987) [18] plantean un modelo para tener en cuenta la influencia del movimiento plano de sólido rígido de los tableros de los puentes y su impacto con los estribos cuando se ven sometidos a aceleraciones sísmicas, especialmente los tableros esviados. En el modelo se incorporan constantes de rigidez y amortiguamiento de las pilas y los apoyos de neopreno y solamente constantes de rigidez en los estribos. E. Maragakis (1989) [19] incorpora las constantes de rigidez y amortiguamiento del conjunto suelo-cimiento de las pilas, para tableros rectos. Entre otros resultados obtuvo que, aun para niveles altos de aceleración, la respuesta no lineal de los estribos era muy leve frente a la de los cimientos.

En estudios basados en el análisis de estructuras reales, mediante técnicas de identificación de sistemas, bien sometidas a excitaciones dinámicas artificiales, como los correspondientes a C. B. Crouse, B. Hushmand y G. R. Martin (1987) [10], o bien por el análisis de la respuesta de puentes instrumentados, frente a terremotos próximos, como el Puente de San Juan Bautista frente al Terremoto de Coyote Lake de 1979, en California, llevado a cabo por J. C. Wilson (1986) [34], o el Paso Superior de Meloland Road, en el Imperial Valley, frente a un terremoto, en 1979, estudiado por S. D. Werner, J. L. Beck y M. B. Levine (1987) [30], son necesarios la consideración de importantes amortiguamientos concentrados en el conjunto estribo-relleno, para conseguir un ajuste adecuado entre la respuesta real y los modelos considerados en el análisis.

En los estudios anteriores se pone de manifiesto la importancia de los fenómenos de interacción suelo-estructura, que en los puentes se manifiesta en su contacto con la cimentación de las pilas y

con los estribos. La metodología para el análisis de la influencia de las cimentaciones puede ser la misma que la seguida en el estudio de otro tipo de estructuras. La importancia de la interacción con el estribo depende de la condición de vinculación tablero-estribo y de su tipología:

- En los tableros simplemente apoyados sobre los estribos, esta influencia es pequeña ya que los apoyos de neopreno actúan como elemento aislante de la acción sísmica. El tablero, sin embargo, puede entrar en contacto con el estribo, bien porque se disponen de topes que entran en funcionamiento cuando los movimientos sobrepasan un valor predefinido o bien porque no se dimensiona la junta tablero-estribo para movimientos severos.
- En puentes de luces medias y pequeñas y en pasos inferiores urbanos, puede emplearse el *efecto pórtico* para reducir esfuerzos en los estribos, transmitiendo, por medio del tablero, el empuje horizontal de uno de ellos al estribo opuesto. En estos casos es preciso el conocimiento de las condiciones de rigidez estribo-suelo.
- La utilización de *estribos integrales*, en los que el tablero queda empotrado en el estribo, permite el ahorro en instalación y mantenimiento de las juntas de dilatación. Los movimientos provocados por deformaciones impuestas de origen térmico y reológico son liberados contando con la flexibilidad suelo estribo cimentado, por lo general, sobre pilotes.
- En puentes de luces grandes y medias, con pilas altas, sometidos a fuertes aceleraciones horizontales provocadas por la sobrecarga de uso, como el ferrocarril, o por los movimientos sísmicos, el anclaje del tablero a uno o a ambos estribos permite reducir los esfuerzos en las pilas.

El trabajo presentará los resultados del cálculo de las rigideces dinámicas de estribos bidimensionales y tridimensionales y su aplicación al estudio del comportamiento dinámico de los puentes. Para ello, se plantearán las ecuaciones fundamentales de *Interacción suelo-estructura* y la aplicación del

*Método de los Elementos de Contorno* a la obtención de dichas rigideces en función de variables adimensionales y, finalmente, se analizará la influencia que dichas rigideces ejercen en el amortiguamiento y frecuencia de la estructura.

## 2. INTERACCION DINAMICA SUELO-ESTRUCTURA

### 2.1. Planteamiento

El análisis de interacción parte de la consideración de un medio tridimensional,  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , que se puede subdividir en un subdominio acotado que será la *estructura*  $\Omega_s$  y un subdominio no acotado, semiespacio, que será el *suelo*  $\Omega_g$ , Fig. 1, verificándose:

$$\Omega \equiv \Omega_s \cup \Omega_g \quad (1)$$

Tanto para el suelo como para la estructura se supondrá un comportamiento elástico o viscoelástico lineal.

En lo que sigue resultará conveniente distinguir, dentro del dominio suelo, el subdominio antes de construir la estructura, que se denomina *campo libre*, y el subdominio de excavación.

El tratamiento numérico de estos problemas mediante técnicas de Elementos Finitos o Elementos de Contorno obliga a la discretización de estos dominios, para cuyos nudos (Fig. 2) se empleará la notación habitual de textos como [37], [38], [32].

Los subíndices tienen los siguientes significados:

- s : nudos que solamente pertenecen a la estructura.
- b : nudos de interfase suelo-estructura.
- g : dominio suelo, con la excavación de los cimientos.
- f : dominio suelo, sin la excavación de los cimientos.
- e : dominio excavado.

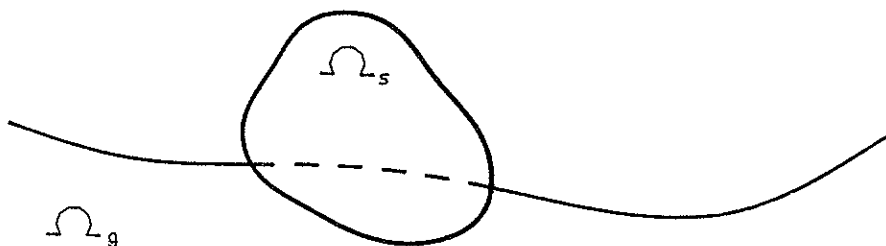


Figura 1.

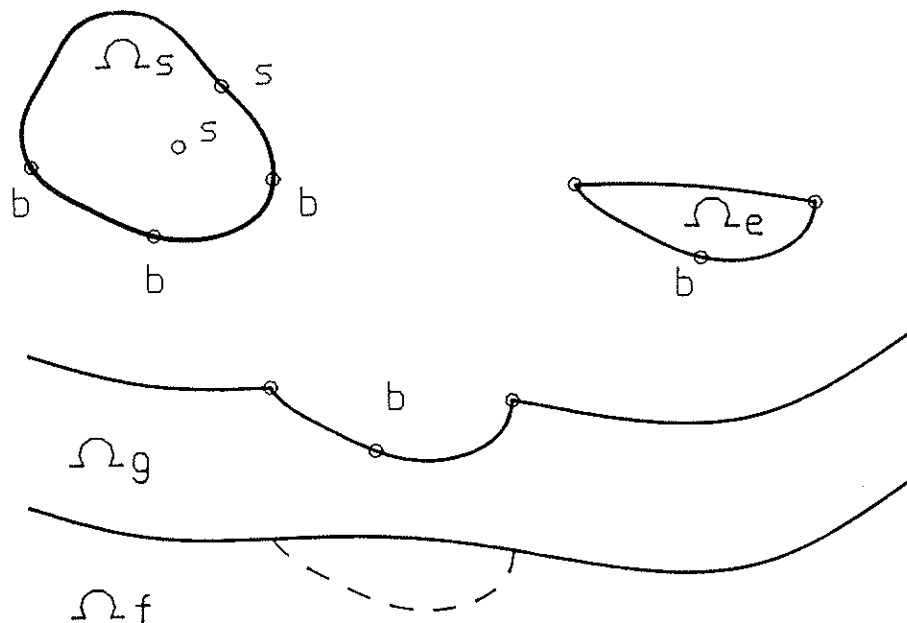


Figura 2. Interacción suelo-estructura: Subdominios.

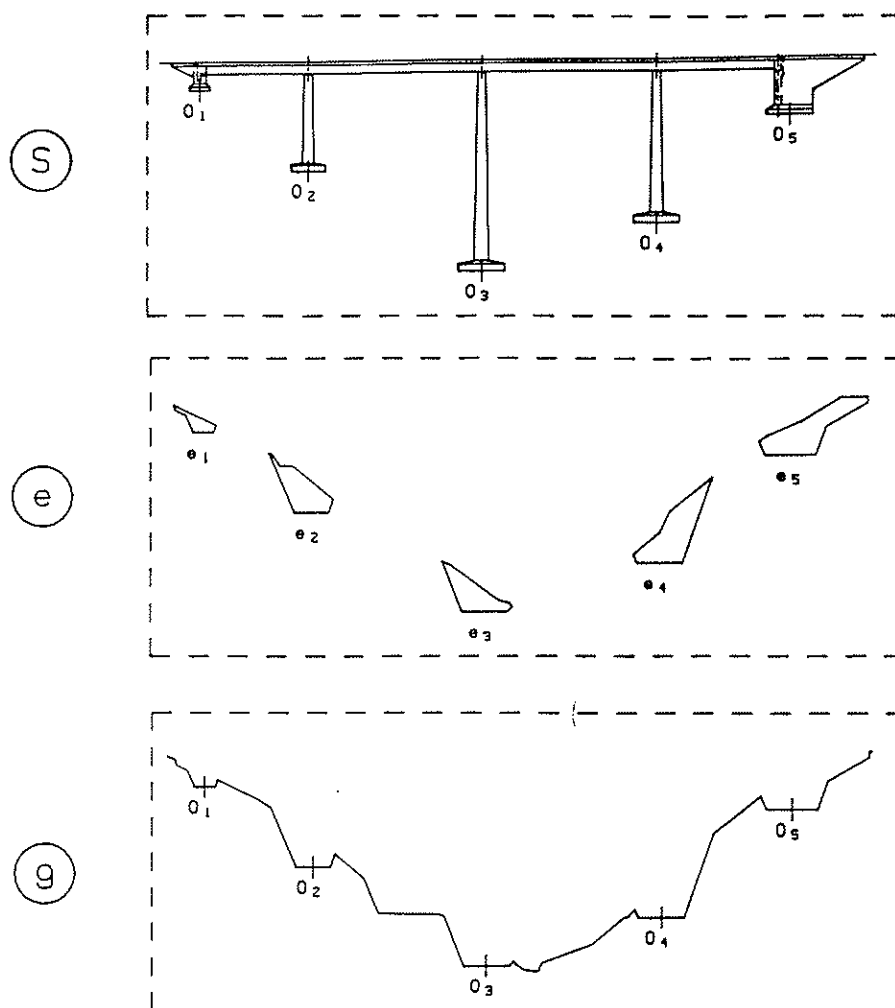


Figura 3. Subdominios en el caso de un puente.

En la Fig. 3 se presentan los subdominios para el caso en el que la estructura sea un puente.

Las ecuaciones del movimiento del dominio  $\Omega$  discretizado se pueden plantear, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

### 2.1.1 Ecuaciones en el dominio del tiempo

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t) = \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0} \quad (2)$$

donde

$\mathbf{v}(t)$  son los desplazamientos nodales.  
 $\mathbf{M}$  es la matriz de masas.  
 $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamientos.  
 $\mathbf{R}(t)$  es la acción exterior, variable en el tiempo, actuante directamente sobre la estructura o como aceleración del suelo.

Este problema puede resolverse o bien por técnicas de *Análisis Modal* o bien por técnicas de integración paso a paso, implícitas o explícitas.

### 2.1.2 Ecuaciones en el dominio de la frecuencia

Si se considera una acción exterior de tipo armónico o una acción cualquiera descompuesta en funciones armónicas mediante su Transformada de Fourier:

$$\mathbf{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(t) e^{-i\omega t} dt$$

siendo la ecuación diferencial (2) transformada:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \\ \mathbf{S}(\omega) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \quad (3)$$

donde:

$$\mathbf{S}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} = \mathbf{K}_{eq}(\mathbf{K}^* + i\omega \mathbf{C}^*) \quad (4)$$

es la matriz de rigidez dinámica o matriz de impedancias.

La ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia, puede ser resuelta por técnicas de superposición modal a partir de la *función de transferencia*, o respuesta de un sistema de un grado de libertad a una excitación armónica.

En problemas como los de interacción suelo-estructura, se plantean situaciones en los que los coeficientes de amortiguamiento entre las distintas partes del sistema poseen valores muy distintos y de diferente naturaleza, dando lugar a los denominados *sistemas con amortiguamiento no clásico* [15], en los que no puede obtenerse una

matriz con amortiguamiento proporcional y, consecuentemente, no se verifica la ortogonalidad de los modos de vibración en el campo real y el consiguiente desacoplamiento de las ecuaciones diferenciales para un sistema de varios grados de libertad [9] [5]. Además, la modelización *exacta* del dominio suelo, conduce a rigideces y amortiguamientos variables con la frecuencia.

## 2.2. Método de las subestructuras. Ecuaciones del movimiento

El procedimiento más empleado en los problemas de interacción de carácter lineal es el denominado *Método de las Subestructuras*. Debido a las características diferentes de los dos subdominios suelo y estructura, resulta conveniente dividir el cálculo de las rigideces dinámicas de cada uno de ellos para, posteriormente, acoplarlos y realizar un cálculo conjunto.

Este procedimiento permite el empleo de modelos y técnicas analíticas y numéricas, diferentes para cada uno de los subdominios.

Las *ecuaciones del movimiento de la estructura* en el dominio de la frecuencia son, de acuerdo a la ec. 3:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_b^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_s \\ \mathbf{P}_b \end{Bmatrix} \quad (5)$$

en donde

$$\mathbf{u}^t = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_b^t \end{Bmatrix} \quad (6)$$

son los desplazamientos totales, y  $\mathbf{S}_{bb}^s$  es la matriz de rigidez dinámica de la estructura, relativa a los nudos en contacto con el suelo.

Las *ecuaciones del movimiento del suelo* en el dominio de la frecuencia son:

$$\mathbf{S}_{bb}^s [\mathbf{u}_b^{t*} - \mathbf{u}_b^s] = \mathbf{P}_b^s \quad (7)$$

donde  $\mathbf{u}_b^s$  es el movimiento del suelo sin la existencia de la estructura y  $\mathbf{S}_{bb}^s$  es la matriz de rigidez dinámica del suelo.

Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la interfase suelo-estructura conduce a:

$$\mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b^s = 0 \\ \mathbf{u}_b^t = \mathbf{u}_b^{t*} \quad (8)$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento de la estructura:

$$S_{bs} u_s^i + S_{bb}^s u_b^i = -S_{bb}^e [u_b^i - u_b^e] \quad (9)$$

Las ecuaciones completas del conjunto suelo-estructura resultan:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^s + S_{bb}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^i \\ u_b^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{bb}^e u_b^e \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Estas ecuaciones ponen en evidencia las tres etapas en que se puede descomponer todo problema de interacción suelo-estructura:

- *Etapas 1:* Obtención del movimiento del suelo a nivel de los cimientos o contacto suelo-estructura,  $u_e$ . Este movimiento puede obtenerse a partir del movimiento conocido de la superficie, *deconvolución*, o bien a partir del cálculo del *movimiento difractado*, conocido el movimiento lejos de la superficie.
- *Etapas 2:* Obtención de las rigideces dinámicas del suelo,  $S_{bb}^e$ , es decir de la superficie libre del suelo junto con las indentaciones provocadas por las excavaciones de los cimientos.
- *Etapas 3:* Cálculo de la estructura al que se le acopla la matriz de rigidez obtenida en la *etapa 2* sometida al movimiento obtenido en la *etapa 1*.

La obtención del *movimiento difractado* en la base de los cimientos,  $u_e$ , no es sencilla y puede sustituirse por el llamado *movimiento de campo libre*,  $u_e^f$ , que es el movimiento que existiría en el suelo con la ausencia de las cimentaciones.

El procedimiento, hasta ahora empleado, se puede utilizar entre el dominio excavado,  $g$ , y el dominio de excavación,  $e$ , para, en conjunto, dar lugar al *campo libre*  $f$ .

$$S_{bb}^s + S_{bb}^e = S_{bb}^f \quad (11)$$

Si se considera la parte excavada como equivalente al subdominio estructura en la ec. 10, al no existir nudos libres se verifican las siguientes relaciones:

$$S_{bb}^s \equiv S_{bb}^e \quad u_b^i \equiv u_b^e \quad (12)$$

$$S_{ss} = S_{sb} = 0 \quad (13)$$

La ecuación 10 se convierte en

$$\begin{aligned} [S_{bb}^s + S_{bb}^e] u_b^i &= S_{bb}^e u_b^e \\ [S_{bb}^s + S_{bb}^e] u_b^i &= S_{bb}^e u_b^e \end{aligned} \quad (14)$$

Si se sustituye en la ec. 11 resulta:

$$S_{bb}^f u_b^f = S_{bb}^e u_b^e \quad (15)$$

sustituyendo en la ec. 10:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^s + S_{bb}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^i \\ u_b^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{bb}^e u_b^e \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Con estas ecuaciones, la *etapa 1* del cálculo de los problemas de interacción, la evaluación del movimiento en la base del cimiento, se puede obtener a partir de la respuesta de *campo libre*.

El *movimiento difractado* se puede obtener a partir del *movimiento de campo libre* y de la matriz de rigidez del suelo, a partir de la ec., 15:

$$u_b^e = S_{bb}^{e-1} S_{bb}^f u_b^f \quad (17)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse en la hipótesis de *cimentación rígida*, para la cual los grados de libertad de los nudos de la interfase suelo-estructura se reducen a seis por el número de puntos de apoyo, si se consideran movimientos diferentes en todos ellos, o exclusivamente a seis grados de libertad si todos los puntos de apoyo poseen el mismo movimiento.

## 2.3. Método de las subestructuras. Interacción cinemática e inercial

En ciertas ocasiones es interesante descomponer el cálculo de interacción en dos etapas:

- *Interacción cinemática:* se considera la estructura sin masa pero con rigidez, obteniéndose los desplazamientos en todos los puntos.
- *Interacción inercial:* a la estructura con masa se aplican las fuerzas de inercia obtenidas en la etapa anterior.

Esta descomposición es útil cuando la dirección de propagación de ondas de la acción sísmica y la configuración del contacto suelo-estructura son tales que el cálculo de la *interacción cinemática* es trivial.

La descomposición de los desplazamientos será, por tanto:

$$\begin{aligned} u_s^i &= u_s^k + u_s^i \\ u_b^i &= u_b^k + u_b^i \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $u^k$  son los desplazamientos correspondientes a la interacción cinemática y  $u^i$  son los correspondientes a la interacción inercial.

### 2.3.1 Interacción cinemática

Si se anula la masa de la estructura, la matriz de rigidez de la estructura se convierte en:

$$S_s(\omega) = K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s = K_s + i\omega C_s \quad (19)$$

Considerando en la estructura que el amortiguamiento es de tipo *histerético* resulta:

$$S_s(\omega) = K_s(1 + 2 \zeta i) \quad (20)$$

La ec. 10 se convierte en:

$$\begin{bmatrix} (1 + 2 \zeta i) K_{ss} & (1 + 2 \zeta i) K_{sb} \\ (1 + 2 \zeta i) K_{bs} & (1 + 2 \zeta i) K_{bb} + S_{bb}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_s^k \\ u_b^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{bb}^e u_b^e \end{Bmatrix} \quad (21)$$

De la primera fila se deduce:

$$K_{ss} u_s^k + K_{sb} u_b^k = 0 \quad (22)$$

$$u_s^k = -K_{ss}^{-1} K_{sb} u_b^k = T_{sb} u_b^k \quad (23)$$

$T_{sb}$  se puede interpretar como una transformación cuasiestática que permite obtener los desplazamientos de la estructura a partir de los movimientos de la base, por consideraciones de rigidez y geometría (condensación estática).

De la segunda fila se obtiene:

$$\{ (1 + 2 \zeta i) [K_{bb}^s - K_{bs} K_{ss}^{-1} K_{sb}] + S_{bb}^e \} u_b^k = S_{bb}^e u_b^e = S_{bb}^e u_b^f \quad (24)$$

Para una configuración cualquiera, los desplazamientos  $u_b^k$ ,  $u_b^e$ ,  $u_b^f$  son diferentes y la obtención de los desplazamientos correspondientes a la interacción cinemática es tan complicada como la obtención de los desplazamientos totales.

Si se considera que la estructura está apoyada en la superficie, se verificará:

$$S_{bb}^e = 0 \quad S_{bb}^e = S_{bb}^f \quad (25)$$

y se cumplirá:

$$u_b^f = u_b^e \quad (26)$$

Si, además, se considera que la propagación de ondas es vertical, los desplazamientos en toda la superficie de contacto son iguales y las fuerzas nodales que se desarrollarían en la estructura serían nulas, por tratarse de un movimiento rígido de la base (sobre una estructura sin masa). Se verifica, por tanto:

$$u_b^k = u_b^f = u_b^e \quad (27)$$

La no existencia de fuerzas nodales en la estructura ante movimientos de sólido rígido de la base, conduce a la relación:

$$K_{bb}^s - K_{bs} K_{ss}^{-1} K_{sb} = 0 \quad (28)$$

Los movimientos del resto de la estructura serán, de acuerdo a la ec. 23:

$$u_s^k = T_{sb} u_b^k = T_{sb} u_b^f \quad (29)$$

obteniéndose por consideraciones geométricas de movimiento de sólido rígido.

### 2.3.2 Interacción inercial

A partir de las ecuaciones generales 10 y la descomposición 18:

$$Su = S(u^k + u^f) = P \quad (30)$$

$$(K + i\omega C - \omega^2 M) u^k + Su^f = P \quad (31)$$

Como:

$$(K + i\omega C) u^k = P \quad (32)$$

se verifica:

$$-\omega^2 M u^k + Su^f = 0 \quad (33)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}^s + S_{bb}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^f \\ u_b^f \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^k \\ u_b^k \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Los desplazamientos correspondientes a la interacción inercial se obtienen aplicando, al conjunto suelo-estructura, las fuerzas de inercia (masa por aceleración) correspondiente a los desplazamientos de la interacción cinemática.

Las ecuaciones se simplifican enormemente bajo la hipótesis de *cimentación rígida*.

## 3. METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

El *Método de los Elementos de Contorno*, M.E.C. es una de las herramientas más poderosas disponibles para la solución de los problemas de Dinámica en medios continuos no acotados, como los planteados en el análisis de interacción suelo-estructura.

### 3.1. Planteamiento del Problema de Elastodinámica

#### 3.1.1 Dominio del tiempo

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) el dominio espacial bi o

tridimensional con las variables  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times T$  con  $T = (0, \infty)$

El problema que se plantea, en el dominio del tiempo, consiste en el cálculo de la función de desplazamientos,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , en el dominio  $\Omega$ , verificando las *Ecuaciones de Navier* para un medio isótropo y homogéneo:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (35)$$

de forma más compacta:

$$\mathbf{E} \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (36)$$

en función de las velocidades de propagación:

$$(c_L^2 - c_T^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + c_T^2 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (37)$$

donde:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (38)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (39)$$

$\mathbf{b}$  : es el vector de fuerzas por unidad de masa.

$G$  : es el módulo de elasticidad transversal.

$E$  : es el módulo de elasticidad longitudinal.

$\nu$  : es el coeficiente de Poisson.

$\rho$  : es la densidad del medio.

$c_L$  : es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales.

$c_T$  : es la velocidad de propagación de las ondas transversales

Verificando las condiciones iniciales y condiciones de contorno:

• *Condiciones iniciales:*

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (40)$$

• *Condiciones de contorno:*

El contorno geométrico del dominio  $\Omega$  queda definido por:

$$\partial\Omega \equiv \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_u \times T \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_t \times T \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{u} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{u} &= [\mathbf{C} : \text{grad} \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = (\lambda \text{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} + \\ &+ \mu [\text{grad} \mathbf{u} + (\text{grad} \mathbf{u})^T] \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (43)$$

### 3.1.2 Dominio de la frecuencia

Si se considera el caso especial de fuerzas por unidad de masa, armónicas en el tiempo, con frecuencia  $\omega$ :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) \exp(i\omega t) \quad (44)$$

El campo de desplazamientos se puede expresar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) \exp(i\omega t) \quad (45)$$

donde:

$\mathbf{u}^T$  : es la componente transitoria.

$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$  : es la componente permanente.

La componente transitoria depende de la solución homogénea y las condiciones iniciales, mientras que la componente permanente depende de las condiciones de contorno.

La componente que interesa obtener es la permanente, que debe verificar la ecuación no homogénea y las condiciones de contorno.

Si se introduce la solución permanente en las *Ecuaciones de Navier* 35, los coeficientes, dependientes de la frecuencia  $\omega$  verificarán:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) + \\ + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (46)$$

$$[\mathbf{E} + \rho \omega^2 \mathbf{I}] \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{0} \quad (47)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{0} \quad (48)$$

• *Condiciones de contorno:*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}; \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_t \quad (49)$$

### 3.2. Solución fundamental en el dominio de la frecuencia

Para su aplicación posterior es preciso el conocimiento de la solución de las *Ecuaciones de Navier* cuando sobre el dominio tridimensional o bidimensional,  $\Omega \equiv \mathbf{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), actúa una carga puntual en un punto cualquiera.

Para su análisis en el dominio de la frecuencia, esta carga puntual será armónica en el tiempo.

$$\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e} \quad (50)$$

donde:



$\xi$  : es el punto de aplicación de la carga.  
 $\mathbf{e}$  : es el vector unitario en la dirección de carga.  
 $\delta$  : es la distribución *delta de Dirac*.

La solución en desplazamientos y vectores tensión, según la normal  $\mathbf{n}$ , se podrá expresar:

$$u_i = U_{ij} e_j \quad (51)$$

$$t_i^a = T_{ij}^a e_j \quad (52)$$

$$t_i^a = \sigma_{ik} n_k$$

en donde  $U_{ij}$  y  $T_{ij}^a$  representan las componentes del desplazamiento y tensión en la dirección  $i$ , cuando la carga puntual actúa en la dirección  $j$ .

La expresión de estas soluciones será [14], [11], [12]:

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_s^2} [\psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}] \quad (53)$$

$$T_{ij}^a(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \frac{1}{\alpha \pi} \left\{ \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) \left( \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_{,j} \right) - \frac{2}{r} \chi \left( n_{,i} r_{,j} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \left( \frac{c_i^2}{c_s^2} = 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right) r_{,i} n_{,j} \right\} \quad (54)$$

donde  $\alpha = 2$ , para  $n = 2$  y  $\alpha = 4$ , para  $n = 3$ , verificándose:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi \quad r = |\mathbf{x} - \xi| \quad (55)$$

Las funciones  $\psi$  y  $\chi$  dependen de " $r$ " y de la dimensión del problema en estudio. Las solucio-

nes planteadas convergen, para el caso  $\omega = 0$ , a la solución estática, denominada *solución de Kelvin*.

### 3.3. Teorema de Reciprocidad en Dinámica

El *Teorema de Reciprocidad de Betti*, válido en el campo de la Estática, fue extendido a la Dinámica por D. Graffi en 1946-1947 y ampliado, para dominios no acotados, por Wheeler y Sternberg en 1968 [31].

Si consideramos dos *Estados Elastodinámicos* diferentes Fig. 4:

$$\epsilon_A \equiv [u_i, t_i, b_i] \quad \epsilon_B \equiv [u'_i, t'_i, b'_i] \quad (56)$$

Con las condiciones iniciales:

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = u_{0,i}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = v_{0,i}(\mathbf{x}) \quad (57)$$

$$u'_i(\mathbf{x}, 0) = u'_{0,i}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}'_i(\mathbf{x}, 0) = v'_{0,i}(\mathbf{x}) \quad (58)$$

Denominando  $\Gamma = \partial\Omega$

#### 3.3.1 Dominio del tiempo

Para  $t > 0$  se cumplirá, entre ambos estados:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_i * u'_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho [b_i * u'_i + v_{0,i} u'_i + u_{0,i} \dot{u}'_i] d\Omega = \\ = \int_{\Gamma} t'_i * u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho [b'_i * u_i + v'_{0,i} u_i + u'_{0,i} \dot{u}_i] d\Omega \end{aligned} \quad (59)$$

El producto  $*$  expresa el producto de convolución en el tiempo:

$$f * g = \int_0^t f(\mathbf{x}, t - \tau) g(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \int_0^t f(\mathbf{x}, \tau) g(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad (60)$$

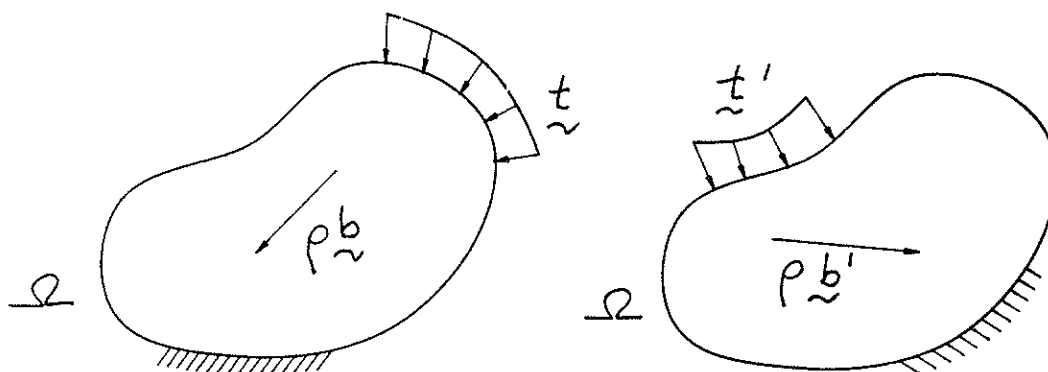


Figura 4. Estados Elastodinámicos  $\epsilon_A$  y  $\epsilon_B$ .

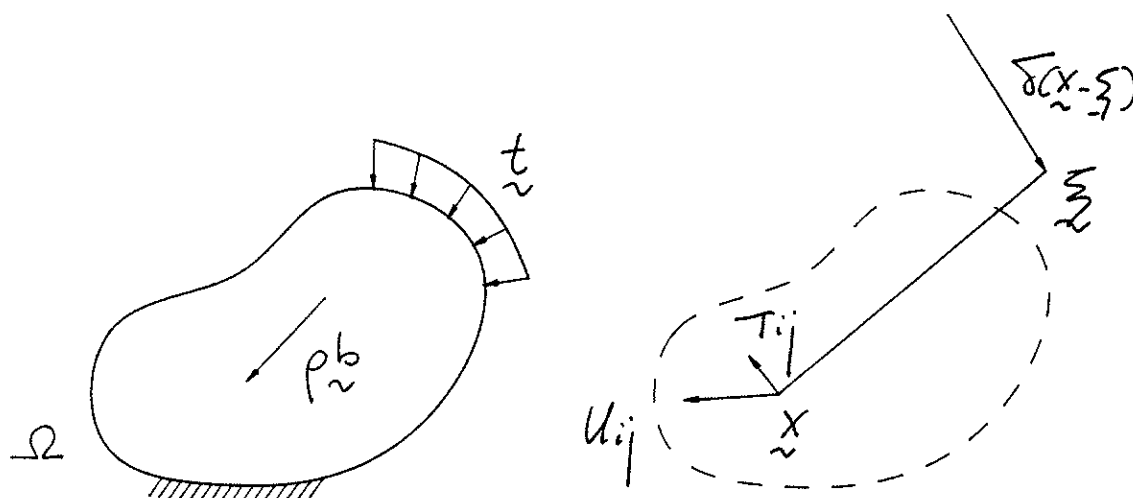


Figura 5. Ecuaciones integrales. Estados elastodinámicos.

Si las condiciones iniciales son nulas, se verificará:

$$\int_{\Gamma} t_i * u'_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i * u'_i d\Omega = \int_{\Gamma} t'_i * u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b'_i * u_i d\Omega \quad (61)$$

### 3.3.2 Dominio de la frecuencia

Para obtener el *Teorema de Reciprocidad* en el dominio de la frecuencia, la Transformada de Fourier convierte el producto de convolución en un producto ordinario.

De la ec. 61:

$$\int_{\Gamma} t_i u'_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i u'_i d\Omega = \int_{\Gamma} t'_i u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b'_i u_i d\Omega \quad (62)$$

en donde las variables representan las amplitudes de las diferentes funciones, en régimen permanente.

## 3.4. Ecuaciones integrales

Si en los *Teoremas de Reciprocidad* enunciados anteriormente se considera como segundo estado elastodinámico  $\varepsilon_a$ :

$$\rho b'_i = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) e_i, \quad u'_j = U_{ij} e_i, \quad t'_j = T_{ij} e_i = T_{ji} e_i \quad (63)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones integrales [14], [17], Fig. 5:

### 3.4.1 Dominio del tiempo

$$C(\boldsymbol{\xi}) u_i(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * t_j(\mathbf{x}, t) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * u_j(\mathbf{x}, t)] d\Gamma(\mathbf{x}) + \rho \int_{\Omega} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * b_j(\mathbf{x}, t) + U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) v_{ij}(\mathbf{x}) + \dot{U}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) u_{ij}(\mathbf{x})] d\Omega(\mathbf{x}) \quad (64)$$

### 3.4.2 Dominio de la frecuencia

$$C(\boldsymbol{\xi}) u_i(\boldsymbol{\xi}; \omega) = \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) t_j(\mathbf{x}; \omega) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) u_j(\mathbf{x}; \omega)] d\Gamma(\mathbf{x}) + \rho \int_{\Omega} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) b_j(\mathbf{x}; \omega)] d\Omega(\mathbf{x}) \quad (65)$$

donde:

$$C(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma \text{ con } \Gamma \text{ suave en } \boldsymbol{\xi} \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Omega_c \end{cases} \quad (66)$$

$\Omega_c$  representa el dominio exterior, complementario de  $\Omega$ .

Las ecuaciones 64 y 65, permiten obtener los desplazamientos  $\mathbf{u}$  en cualquier punto del dominio, a partir de las funciones de desplazamientos y tensiones en el contorno y de las fuerzas por unidad de masa en el dominio.

Para obtener el desplazamiento según una dirección en un punto determinado, basta aplicar en dicho punto, *punto de colocación*, una carga puntual en la dirección correspondiente y evaluar las integrales que solamente dependen de las funciones de desplazamientos y tensiones en el contorno y de las fuerzas por unidad de masa en el dominio.

Dado el carácter singular de los núcleos  $U_{ij}$  y  $T_{ij}$ , las ecuaciones anteriores se han obtenido tras un paso al límite. Las integrales que incluyen el núcleo  $T_{ij}$  representan, estrictamente, el *Valor Principal de Cauchy* de las mismas.

### 3.5. Discretización de las ecuaciones integrales: M.E.C

El *Método de los Elementos de Contorno* consiste en aplicar la metodología robusta de discretización de dominios e interpolación de variables del Método de los Elementos Finitos, a la solución de las ecuaciones integrales 65 y 64.

Los detalles de esta técnica pueden encontrarse en textos como [4], [13], [17], [2], [3], [8].

Desarrollando las ecuaciones en el dominio de la frecuencia, solamente es necesaria la discretización de las variables geométricas.

Si se discretiza el contorno en elementos de superficie:

$$\Gamma \equiv \partial\Omega \equiv \bigcup_{\beta=1}^M \Gamma^{\beta} \quad (67)$$

La discretización del dominio en elementos de volúmen, que son realmente *celdas de integración*:

$$\Omega \equiv \bigcup_{\delta=1}^P \Omega^{\delta} \quad (68)$$

Las variables que pueden ser incógnitas  $u_{\alpha}^{\alpha}$ ,  $t_{\alpha}^{\alpha}$  del problema, se definen en los *nudos* del contorno de coordenadas  $x^{\alpha}$ .

Si se define la interpolación de tipo isoparamétrico del tipo:

$$x_i(\eta) = N^{\alpha}(\eta)x_i^{\alpha} \quad \alpha \in 1, 2, \dots, N \quad (69)$$

$$u_i(\eta) = N^{\alpha}(\eta)u_i^{\alpha} \quad \alpha \in 1, 2, \dots, N \quad (70)$$

$$t_i(\eta) = N^{\alpha}(\eta)t_i^{\alpha} \quad \alpha \in 1, 2, \dots, N \quad (71)$$

Se ha empleado el convenio habitual de suma- ción. Las funciones  $N^{\alpha}$ , son las funciones de forma, y  $N$  es el número total de nudos.

Para las funciones dato, en el dominio, pueden emplearse funciones de interpolación diferentes:

$$b_i(\eta) = M^{\gamma}(\eta)b_i^{\gamma} \quad \gamma \in 1, 2, \dots, Q \quad (72)$$

Si se introducen estas funciones en la ecuación integral 65, por cada dirección de aplicación de la carga puntual se obtiene una ecuación.

Si se aplica una carga puntual en tantos puntos, *puntos de colocación*, y en tantas direcciones independientes como incógnitas existan, se genera un procedimiento sistemático de obtención de un sistema de ecuaciones lineales: *Método de Colocación*.

Si los puntos de colocación coinciden con los nudos en los que se ha discretizado el contorno, se

denomina *Método Directo*, y en caso contrario, *Método Indirecto*.

El *Método Indirecto* evita el cálculo de integra- les singulares; pero obliga a establecer criterios para situar los puntos de colocación. Por el con- trario, el *Método Directo* precisa del cálculo de integrales singulares y cuasisingulares, quedando los puntos de colocación situados a priori.

Desarrollando el *Método Directo*, de la ec. 65:

$$c(x^{\alpha})u^{\alpha}(x^{\alpha};\omega) + \sum_{\beta=1}^M \sum_{\alpha=1}^N u^{\alpha}(x^{\alpha};\omega) \int_{\Gamma^{\beta}} N^{\alpha}(\eta)T^{\beta} \cdot (x^{\alpha}, y(\eta); \omega) J_s(\eta) d\Gamma(\eta) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^M \sum_{\alpha=1}^N t^{\alpha}(x^{\alpha}; \omega) \int_{\Gamma^{\beta}} N^{\alpha}(\eta) U^{\beta}(x^{\alpha}, y(\eta); \omega) J_s(\eta) d\Gamma(\eta) +$$

$$+ \sum_{\delta=1}^P \sum_{\gamma=1}^Q b^{\gamma}(x^{\alpha}; \omega) \cdot$$

$$\int_{\Omega^{\delta}} \rho M^{\gamma}(\eta) U^{\delta}(x^{\alpha}, y(\eta); \omega) J_v(\eta) d\Omega(\eta)$$

$$\alpha \in 1, 2, \dots, N \quad (73)$$

siendo las funciones  $J_s$  y  $J_v$  las funciones jacobia- nas de la transformación.

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial:

$$Hu - Gt = F \quad (74)$$

en donde  $u$  y  $t$  representan los desplazamientos y los vectores tensión en el contorno, respectiva- mente.

En el caso en que no se consideren fuerzas por unidad de masa, la ecuación matricial se reduce a:

$$Hu = Gt \quad (75)$$

que permite resolver cualquier problema de con- torno mixto.

## 4. CALCULO DE RIGIDECEES DINAMICAS

La segunda etapa de todo cálculo de interac- ción suelo-estructura, consiste en la evaluación de la matriz de rigidez del suelo,  $S_{bb}^*$ , sobre el subdo- minio excavado.

La obtención de esta matriz es equivalente, en el caso general, a la resolución del problema de contorno mixto sobre el subdominio  $\Omega_s$  de la Fig. 6, en el que en parte o la totalidad de la interfase suelo-estructura son conocidos los desplazamien-

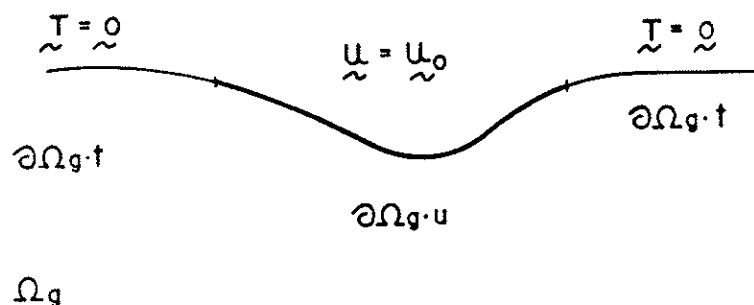


Figura 6. Cálculo de rigideces. Problema de contorno.

tos (contorno  $\partial \Omega_u$ ) y en el resto del contorno ( $\partial \Omega_t$ ) los vectores tensión son nulos.

Para una situación general de cimentación o contacto flexible, el número de problemas, como el planteado, que hay que resolver serán tantos como nudos por grados de libertad se encuentre discretizada la interfase.

En el caso de cimentación o contacto rígido, el número de problemas es el de cimentaciones por el número de grados de libertad considerados. La hipótesis de movimiento rígido permite concentrar los movimientos y la resultante de tensiones, en un punto característico determinado.

Las interfases de contacto entre una estructura tipo puente y el suelo, son las cimentaciones de pilas y los estribos. En las investigaciones realizadas hasta ahora, se han calculado las rigideces dinámicas de las estructuras de cimentación, fundamentalmente cimentaciones superficiales; y bastante menores han sido los intentos de cálculo de las rigideces de los estribos.

Los estudios en el campo de las cimentaciones se han centrado, fundamentalmente, en las de tipo superficial, *zapatas*, con diversas geometrías. Estas investigaciones estuvieron unidas, en principio, al estudio de cimentaciones de máquinas y, en desarrollos posteriores, al de las cimentaciones de estructuras industriales, como las Centrales Nucleares. Una recopilación detallada del desarrollo histórico de estas investigaciones, puede encontrarse en [1], [6]; y una recopilación reciente de resultados en [23].

A diferencia del cálculo de rigideces dinámicas de cimentaciones, el interés por el cálculo de las rigideces dinámicas de los estribos es reciente. Su cálculo ha venido propiciado por los análisis de los registros obtenidos en estructuras instrumentadas, sometidas a la acción de los terremotos, en las que se detecta una influencia significativa de los estribos.

Las aproximaciones realizadas en este campo han sido escasas y, sorprendentemente, con metodologías alejadas de la experiencia ya disponible en el área de las cimentaciones superficiales.

J. C. Wilson (1988) [33] evalúa las rigideces

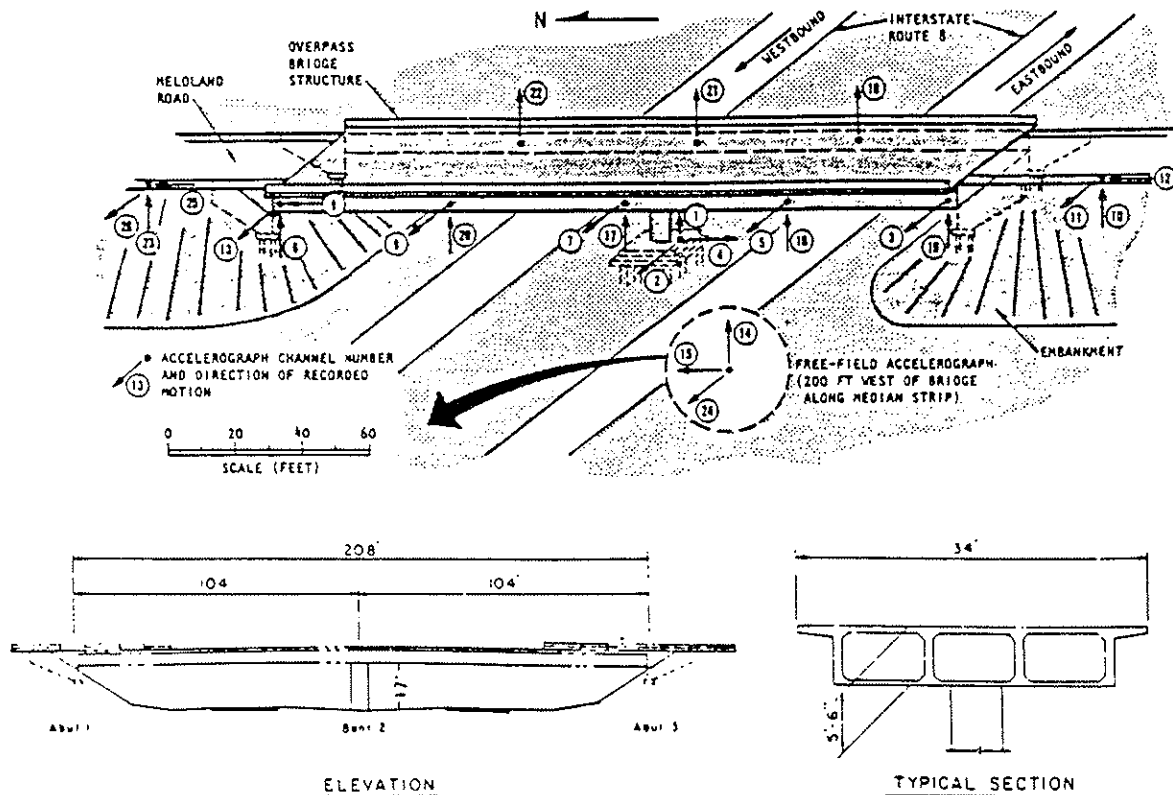
estáticas de estribos cerrados de puentes no esviados. Realizando la hipótesis de un comportamiento rígido de todo el estribo: muro frontal, aletas y cimientos, obtiene las rigideces correspondientes a los seis grados de libertad existentes. Los desplazamientos son calculados basándose en las soluciones estáticas de diversos tipos de cargas en el semiespacio elástico y homogéneo.

M. B. Levine y R. F. Scott (1989) [16] realizan una evaluación simplificada de las rigideces estáticas de las cimentaciones de la pila y del conjunto de los estribos del Paso superior de Meloland Road, Fig. 7, con el fin de ajustar un modelo sencillo a los resultados obtenidos de la instrumentación. Las rigideces de los estribos se obtuvieron a partir de la consideración de un modelo de Winkler del conjunto muro-suelo, constante con la altura.

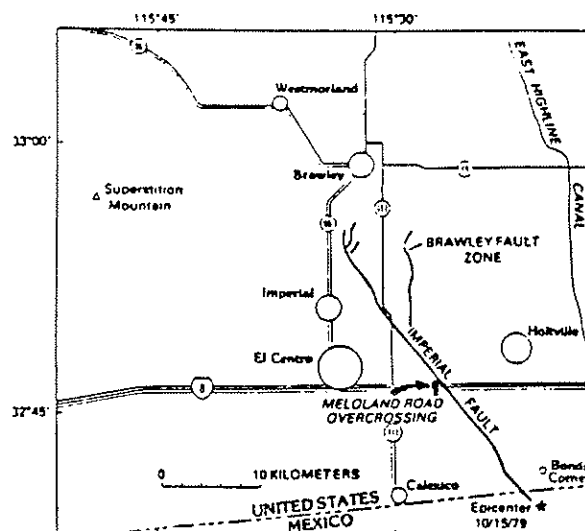
J. C. Wilson y B. S. Tan (1990) [35] [36] presentan un estudio interesante sobre la influencia del conjunto terraplén-estribo en la respuesta sísmica del Paso superior de Meloland Road, Fig. 7.

En la primera parte del estudio, proponen un modelo sencillo para representar la rigidez del conjunto terraplén-estribo mediante un modelo bidimensional de Elementos Finitos, en el que se calculan las rigideces estáticas verticales y horizontales, así como su frecuencia fundamental, a partir de los datos obtenidos de la instrumentación de los estribos y tablero y mediante el empleo de técnicas de identificación de sistemas. En la respuesta del conjunto terraplén-estribo, detectaron una importante caída de la frecuencia, atribuida a una pérdida, en torno al 50% de la rigidez del suelo, por un comportamiento no elástico, así como índices de amortiguamiento elevados, entre el 25 y 45%. Estos amortiguamientos concentrados se convierten en valores entre el 3 y el 12%, a nivel de estructura completa, para determinados modos de vibración.

La aplicación del *Método de los Elementos de Contorno* a este problema de Interacción particular, permitirá justificar, de forma numérica, estos resultados obtenidos, por comparación de datos experimentales.



(b) Bridge dimensions



(c) Proximity to Imperial Fault

Figura 7. Puente Meloland Road (California) [30].

#### 4.1. Problemas bidimensionales

Existen numerosos casos en los que el problema de interacción suelo-estructura puede ser tratado como bidimensional: Los pasos inferiores en zonas urbanas, poseen longitudes grandes que permiten considerar el problema fundamentalmente plano; los muros de sótano de edificaciones, etc.

En estos casos, el problema de contorno que hay que resolver es el representado en la Fig. 8.

Las hipótesis fundamentales adoptadas son:

- Comportamiento viscoelástico lineal del suelo, caracterizado por: la densidad  $\rho$ , el módulo de elasticidad transversal  $G$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$  e índice de amortiguamiento  $\zeta$ .

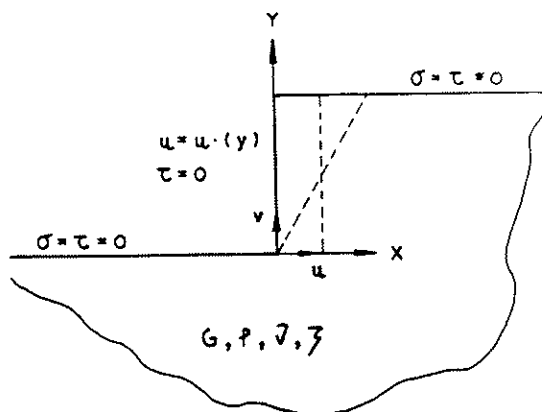


Figura 8. Modelo bidimensional en el semiespacio.

- Comportamiento rígido del muro.

Las condiciones de contorno consideradas serán:

- El contorno vertical representa el contacto del muro frontal con el suelo. Se considera que el contacto suelo-muro es no adherente, por lo que la tensión tangencial es nula. Los desplazamientos horizontales serán conocidos. Dependiendo de las rigideces que se van a calcular será, o bien un desplazamiento uniforme, o bien una rotación en torno al origen.
- Los contornos horizontales son indefinidos y corresponden a contornos libres, por lo que tanto las tensiones normales como tangenciales son nulas.

En una primera aproximación al problema, se pretende estudiar la influencia del muro frontal de manera independiente de la cimentación. De esta forma se podrán aislar los parámetros que intervienen y estudiar las rigideces aislando el tipo de cimentación superficial o profunda.

Por esta razón, las rigideces que se han evaluado son las correspondientes al desplazamiento horizontal y al giro, ya que la vertical es claramente dependiente del tipo de cimentación y en la que el muro tendría influencia solamente en la hipótesis de contacto suelo-muro con adherencia perfecta.

La matriz de rigidez dinámica que se obtendrá, será, de acuerdo a los ejes de la Fig. 8 y referido al punto 0, origen de coordenadas:

$$S_{00}^k(\omega) = \begin{bmatrix} S_x & S_{x,zz} \\ S_{z,x} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Con el fin de analizar el comportamiento numérico de los modelos analizados, se ha recurrido a la comparación con soluciones analíticas y semianalíticas disponibles para el estudio del comportamiento dinámico de muros. Para dominios acotados son interesantes las aportaciones de J. Wood [39]; y en dominios no acotados las de H. Tajimi [29]. En [21] y [20] se realiza un estu-

dio en el que se demuestra el buen ajuste que se obtiene con el M.E.C. a las soluciones analíticas.

La malla de Elementos de Contorno utilizada, se representa en la Fig. 9. Los contornos indefinidos se discretizan con una *malla adaptable* con la frecuencia de excitación, de forma que la longitud discretizada es siempre un cuarto de la longitud de onda; y la discretización de los dos ángulos rectos, extremo inferior y superior del muro, es tal que el tamaño de los elementos es idéntico a ambos lados del vértice.

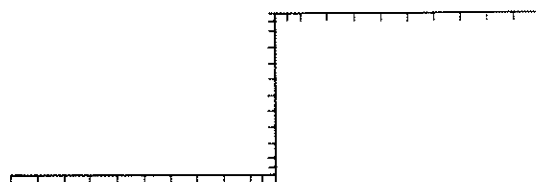


Figura 9. Muro en semiespacio. Malla de elementos de contorno.

Debido al carácter nulo de la rigidez estática para los problemas bidimensionales, el estudio de dependencia con el coeficiente de Poisson se plantea con las constantes de rigidez adimensionales:

$$S_x(\omega) = K_x(\omega) = G[k_x + ia_0c_x] \quad (77)$$

$$S_{zz}(\omega) = K_{zz}(\omega) = GH^2[k_{zz} + ia_0c_{zz}] \quad (78)$$

No se considera la rigidez de acoplamiento,  $S_{x,zz}$ , por tratarse de valores más pequeños que los anteriores.

En las Figs. 10 y 11 se representan las variaciones de los coeficientes adimensionales de rigidez, con el coeficiente de Poisson.

Si bien no es posible obtener leyes analíticas precisas, aproximadamente, los coeficientes poseen una dependencia del tipo  $1/1-\nu$ .

## 4.2. Problemas tridimensionales

Pese al amplio campo de aplicación de los problemas bidimensionales, la mayoría de los estribos de puente poseen un carácter claramente tridimensional.

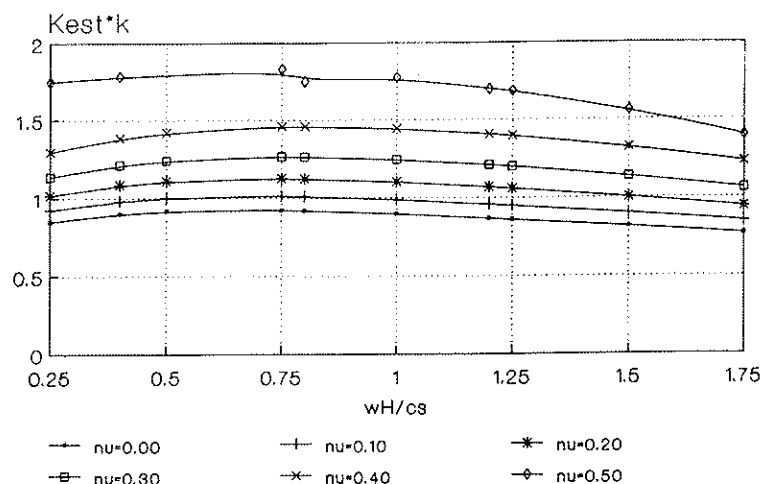
El estribo tipo empleado para el estudio, corresponde a un estribo cerrado, formado por un muro frontal y dos muros laterales perpendiculares al primero (Fig. 12).

Al igual que para el problema en dos dimensiones, las hipótesis adoptadas son:

- Comportamiento viscoelástico lineal del suelo, caracterizado por: la densidad  $\rho$ , el

## MURO EN SEMIESPACIO

Desplazamiento horizontal



## MURO EN SEMIESPACIO

Desplazamiento horizontal

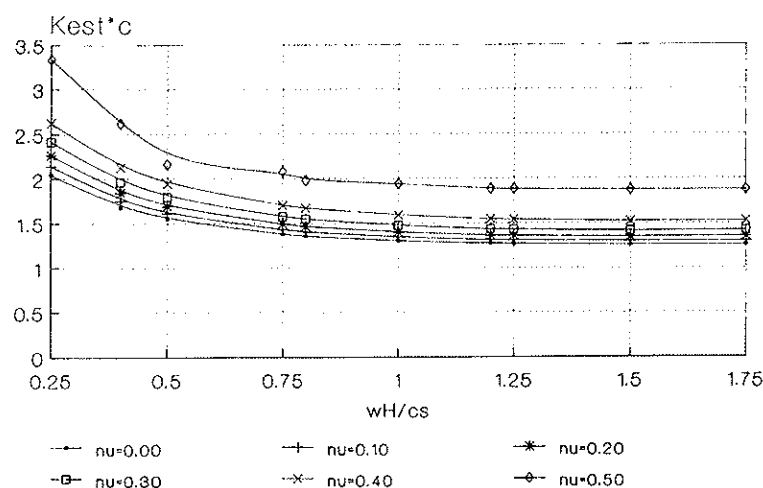


Figura 10. Muro en semiespacio. Variación de la rigidez  $K_x$  con el coeficiente de Poisson.

módulo de elasticidad transversal  $G$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$ , e índice de amortiguamiento  $\zeta$ .

- Comportamiento rígido del muro.

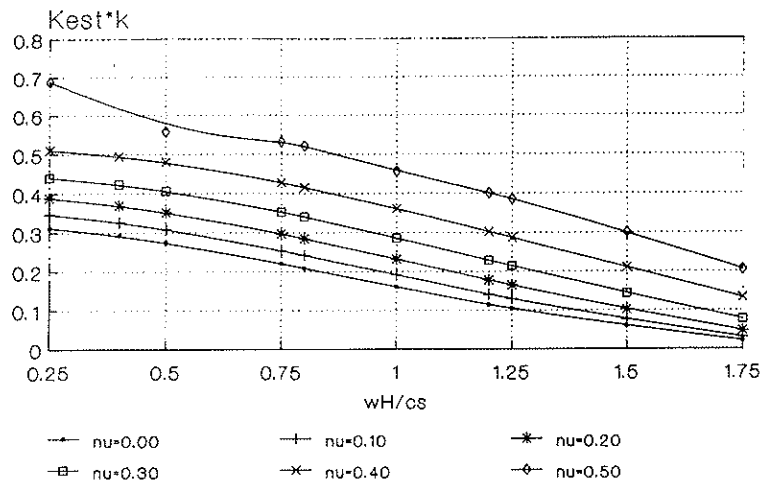
Respecto a la geometría del conjunto estribo-terraplén, se han realizado varias simplificaciones, con el fin de acotar al máximo las variables que intervienen en el problema.

- El terraplén de acceso, tras el muro, se considera *horizontal e indefinido*. En la zona próxima al muro, la pendiente del terraplén es pequeña por encontrarse, generalmente, en un acuerdo vertical de tipo parabólico, próximo al vértice del mismo. Las pendientes requeri-

das obligan a longitudes de terraplén de veinte a treinta veces la altura del muro, por lo que puede considerarse indefinido, para el presente estudio.

- *No se considera la influencia de los derrames en el terraplén.* El carácter, fundamentalmente granular, del material empleado para la formación de los terraplenes, obliga a crear unos planos y conos de transición, *derrames*, para conferirle estabilidad. Estos derrames, generalmente no se encuentran compactados, por lo que su capacidad para resistir nuevos incrementos de tensión es pequeña. La no consideración de estos derrames permite una mejor

### MURO EN SEMIESPACIO Rotacion



### MURO EN SEMIESPACIO Rotacion

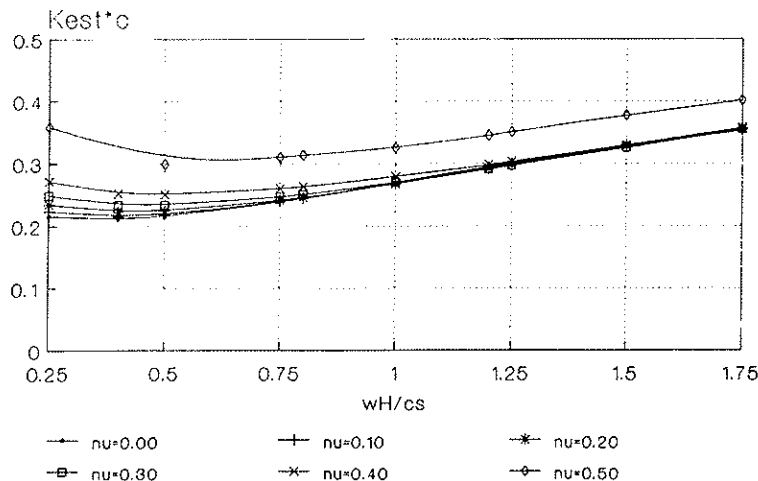


Figura 11. Muro en semiespacio. Variación de la rigidez  $K_{zz}$  con el coeficiente de Poisson.

aproximación para la evaluación de la componente de rigidez, aunque infravalora la componente correspondiente a la disipación.

- No se considera la influencia de la cimentación. En esta primera aproximación al problema, se pretende aislar la influencia de los muros, del tipo de cimentación. La influencia de la cimentación es primordial en las componentes verticales de la rigidez, que son menos importantes en la respuesta dinámica del tablero.

Bajo las consideraciones anteriores, el problema de contorno que hay que resolver es el que se indica en la Fig. 13, que corresponde a un prisma rectangular, que representa el terraplén de acceso,

sin derrames sobre el semiespacio elástico, con las siguientes condiciones de contorno:

- Los planos horizontales,  $z = 0$  y  $z = H$ , corresponden a las superficies libres del semiespacio y terraplén, respectivamente. En estas superficies, los vectores tensión son conocidos e iguales a cero.
- El plano vertical,  $x = 0$ , corresponde a la superficie de contacto del terraplén con el muro frontal del estribo. En esta superficie son los desplazamientos conocidos con el fin de evaluar la rigidez del conjunto.
- Los planos verticales,  $y = B/2$ ,  $y = -B/2$ , tienen parte en contacto con los muros laterales



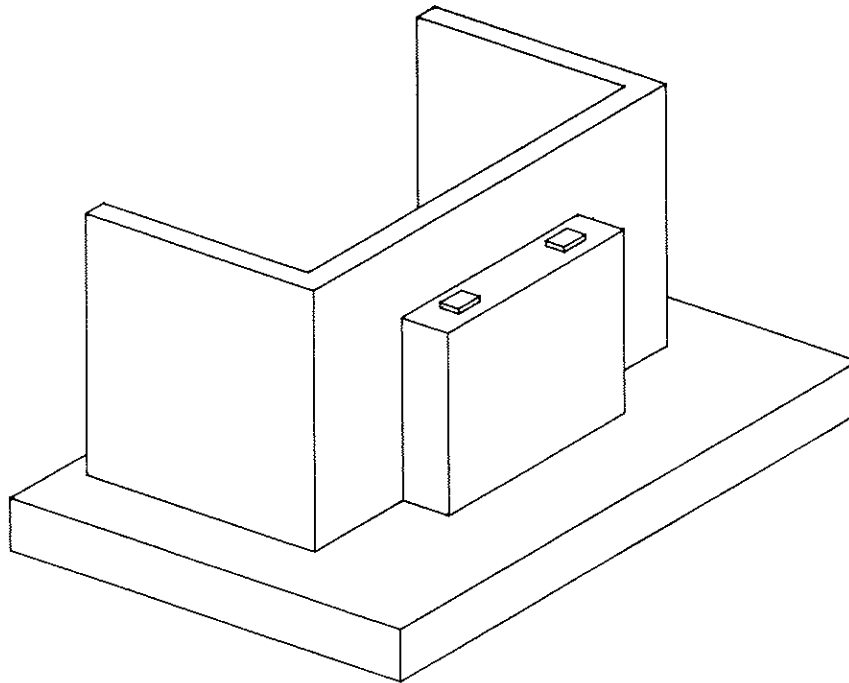


Figura 12. Estribo tridimensional tipo.

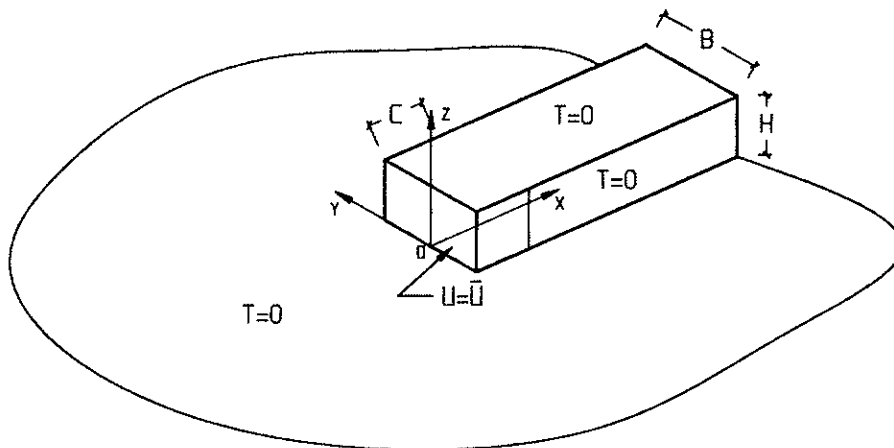


Figura 13. Problema de contorno.

del estribo,  $0 \leq x < C$ , donde los desplazamientos son conocidos, y parte correspondiente a la superficie libre del terraplén esquemático considerado,  $x \geq C$ .

Con el sistema de ejes representado, con la hipótesis de comportamiento rígido del muro y considerando el origen de coordenadas 0, como punto de referencia de las rigideces, la matriz de rigidez dinámica del estribo tipo considerado posee la siguiente estructura:

$$S_{00}^E(\omega) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & S_{xz} & 0 & S_{x,yy} & 0 \\ 0 & S_y & 0 & S_{y,xx} & 0 & S_{y,zz} \\ S_{zx} & 0 & S_z & 0 & S_{z,yy} & 0 \\ 0 & S_{xx,y} & 0 & S_{xx} & 0 & S_{xx,zz} \\ S_{yy,x} & 0 & S_{yy,z} & 0 & S_{yy} & 0 \\ 0 & S_{zz,y} & 0 & S_{zz,xx} & 0 & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Los términos nulos son consecuencia de la simetría de la estructura respecto al plano XZ.

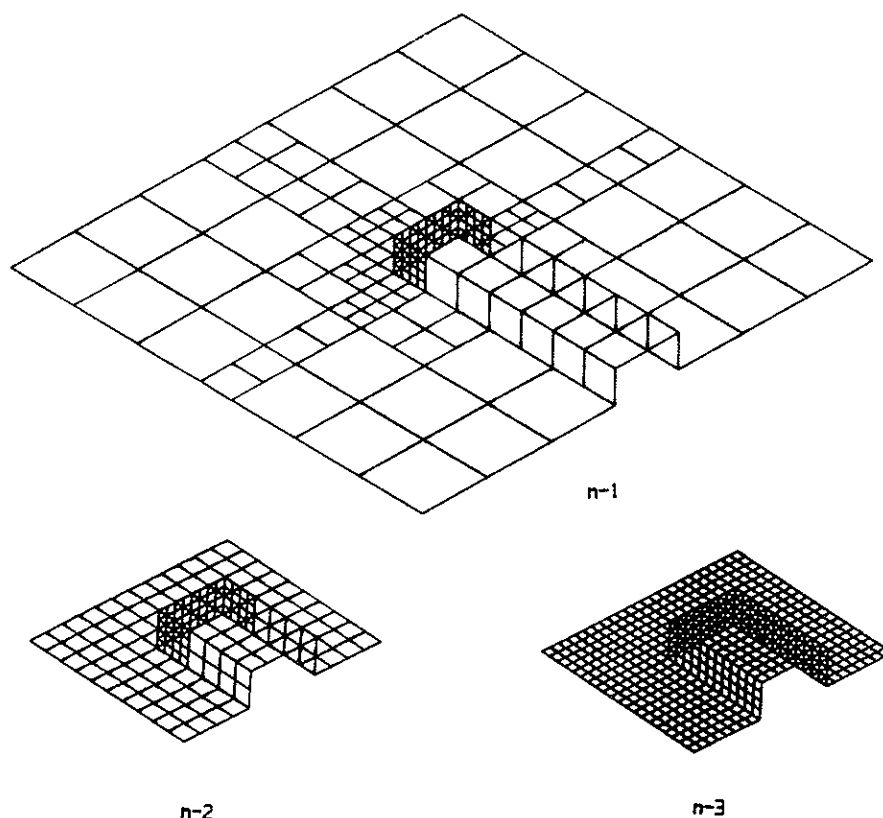


Figura 14. Modelo tridimensional. Mallas de elementos de contorno.

Se analizarán especialmente las rigideces directas, correspondientes a la diagonal principal, dado que las rigideces acopladas poseen valores más pequeños.

Los términos de rigidez podrán expresarse de la forma habitual:

$$S(\omega) = K(\omega) = K_{st}[k(\omega) + ia_0c(\omega)] \quad (80)$$

con  $a_0 = \omega H/c_s$ .

El análisis de las variables que intervienen en la modelización, como son la superficie libre discretizada y el tamaño característico de los elementos, llevado a cabo en [21], conduce a que es ésta última la más importante para el rango de frecuencias en estudio. Las comparaciones se han realizado con las mallas de elementos de contorno de la Fig. 14.

Para las relaciones adimensionales,  $B/H = 2$ , y  $C/H = 1$ , las rigideces estáticas pueden expresarse:

$$\begin{aligned} K_x &= 6.07 \frac{GH}{2-\nu} & K_{xx} &= 5.69 \frac{GH^3}{2-\nu} \\ K_y &= 4.90 \frac{GH}{2-\nu} & K_{yy} &= 5.10 \frac{GH^3}{2-\nu} \\ K_z &= 6.08 \frac{GH}{2-\nu} & K_{zz} &= 9.27 \frac{GH^3}{2-\nu} \end{aligned} \quad (81)$$

En las Figs. 15 y 16, se representan, a modo de ejemplo, las variaciones de las rigideces dinámicas adimensionales al desplazamiento longitudinal y al giro, en la forma 80, con el coeficiente de Poisson.

Las componentes de rigidez al desplazamiento,  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$ , se comportan de forma similar en cuanto a su dependencia de  $\nu$ . Hasta valores de la frecuencia adimensional,  $a_0$ , inferiores a 2 ( $a_0 < 2$ ), estas rigideces se comportan de forma independiente de  $\nu$ . Para valores superiores, la dependencia puede ser importante, especialmente las componentes  $k_y$  y  $k_z$ , para componentes de  $\nu$  elevadas ( $\nu > 0.4$ ).

Las componentes de rigidez al giro,  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$  y  $k_{zz}$ , y todas las componentes de amortiguamiento  $c$ , poseen un comportamiento dependiente de  $\nu$  de forma bastante homogénea en todo el rango de frecuencias estudiado, pudiendo considerarse la dependencia como homotética a una ley media que recoge la variación con la frecuencia.

Esta forma de variación se asemeja a las obtenidas por Veletsos para las zapatas circulares superficiales [1].

Conviene destacar, por otro lado, el carácter decreciente de las componentes de rigidez en todas las componentes, llegando, a partir de una determinada frecuencia, a alcanzar valores negati-

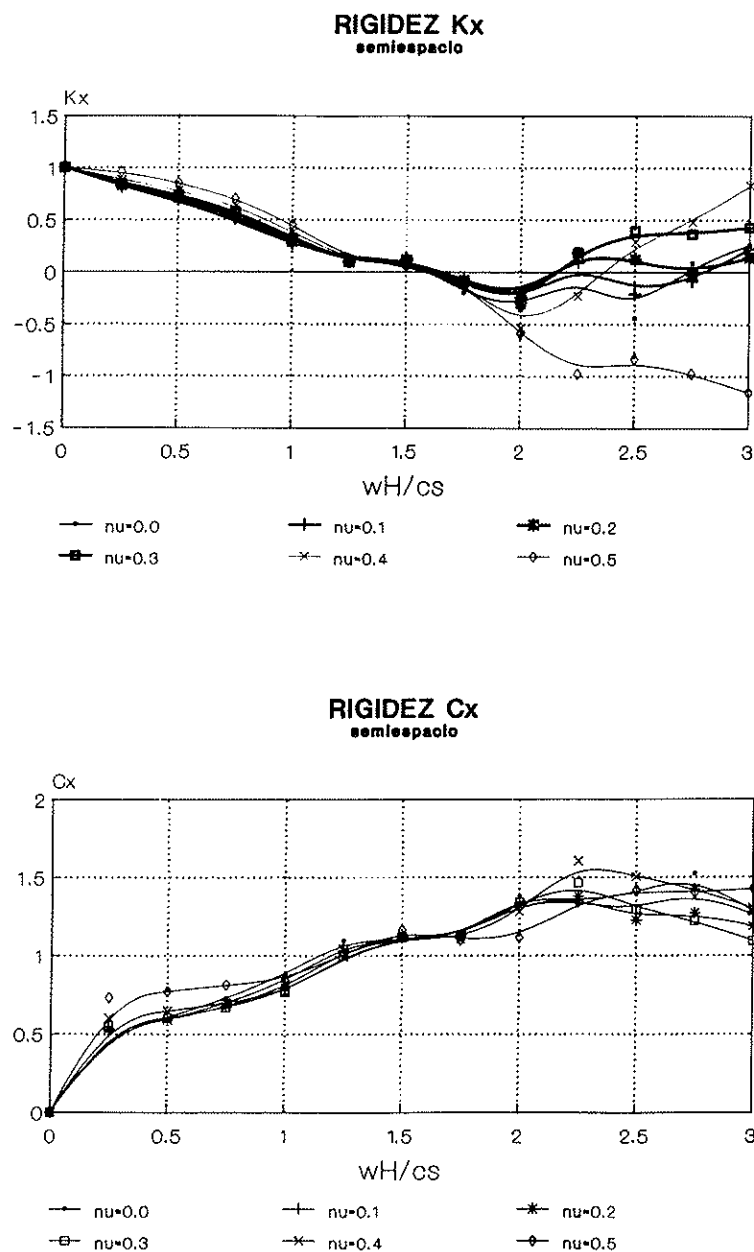


Figura 15. Estribo en el semiespacio. Rigideces dinámicas  $K_x$ . Variación con  $\nu$ .

vos. Los valores negativos indican la preponderancia de los efectos inerciales sobre los de rigidez.

Teniendo en cuenta que la parte real de la rigidez dinámica es:

$$K(\omega) = \Re[S(\omega)] = K - \omega^2 M \quad (82)$$

para unos determinados valores de  $\omega$ , el término  $\omega^2 M$  puede superar a  $K$ , dando lugar a valores negativos de la rigidez dinámica.

Las componentes de amortiguamiento, por el contrario, son funciones crecientes con la frecuencia, para el rango estudiado.

## 5. INFLUENCIA DEL ESTRIBO EN LA RESPUESTA DINÁMICA DE LOS PUENTES

Los casos analizados en los cuales es preciso contar con la contribución del conjunto estribo-suelo, así como el simple análisis cualitativo de

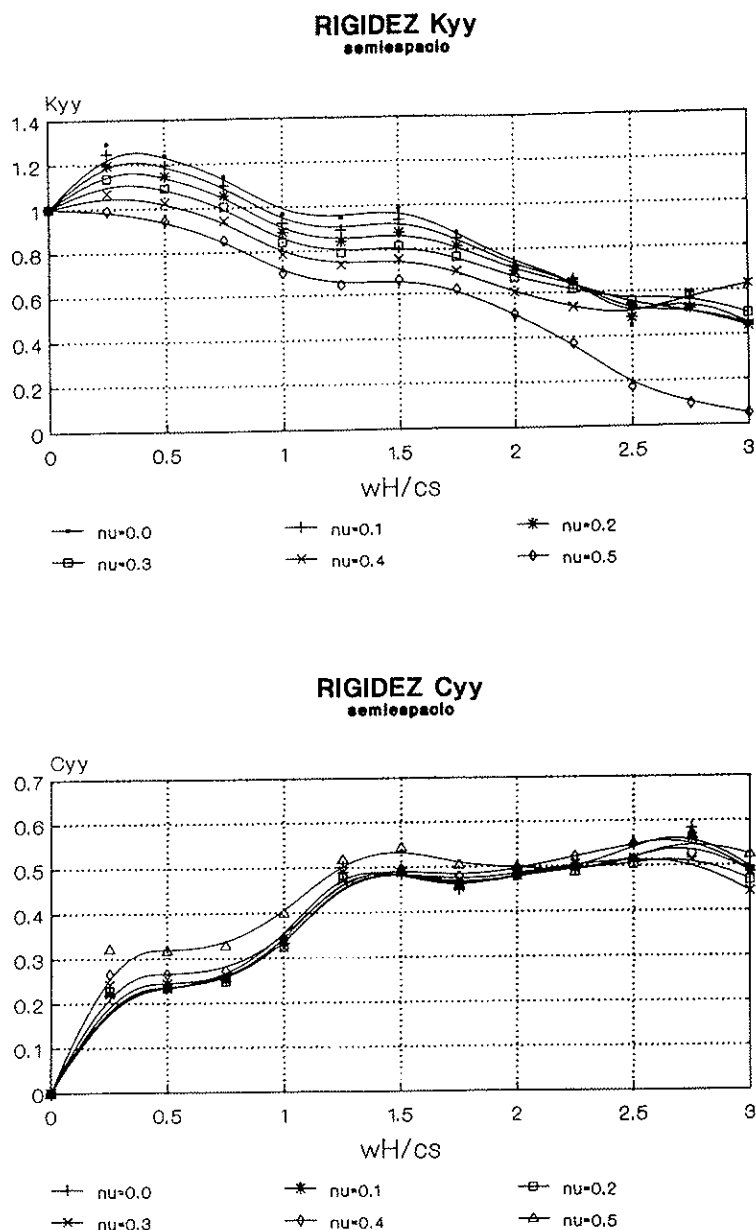


Figura 16. Estribo en el semiespacio. Rigideces dinámicas  $K_{yy}$ . Variación con  $\nu$ .

las dimensiones relativas del conjunto estribo-terraplén de un Paso Superior tipo de autopista, como el de la Fig. 17, justifican el cálculo de las componentes de rigidez y amortiguamiento realizado hasta ahora.

Para estudiar la importancia relativa de los diferentes parámetros que intervienen en la respuesta dinámica de los puentes se considerará un modelo sencillo que recoge la influencia de las componentes de inercia, rigidez y amortiguamiento del tablero, estribo, pilas y cimientos.

Se estudiarán los efectos de interacción dinámica suelo-estructura en los estribos y en los cimientos de las pilas, considerando solamente los efectos de *interacción inercial*.

Los datos supuestos del movimiento del suelo suponen que se ha tenido en cuenta la *interacción cinemática*, o bien que es lo suficientemente pequeña como para suponerla despreciable.

De esta forma, podrá obtenerse la influencia de los diferentes parámetros en la respuesta dinámica del conjunto, para un sistema de un solo grado de libertad, condensadas en:

- La frecuencia propia de vibración.
- El índice de amortiguamiento equivalente.

### 5.1. Modelo de estudio

El modelo que se va a considerar para el estu-

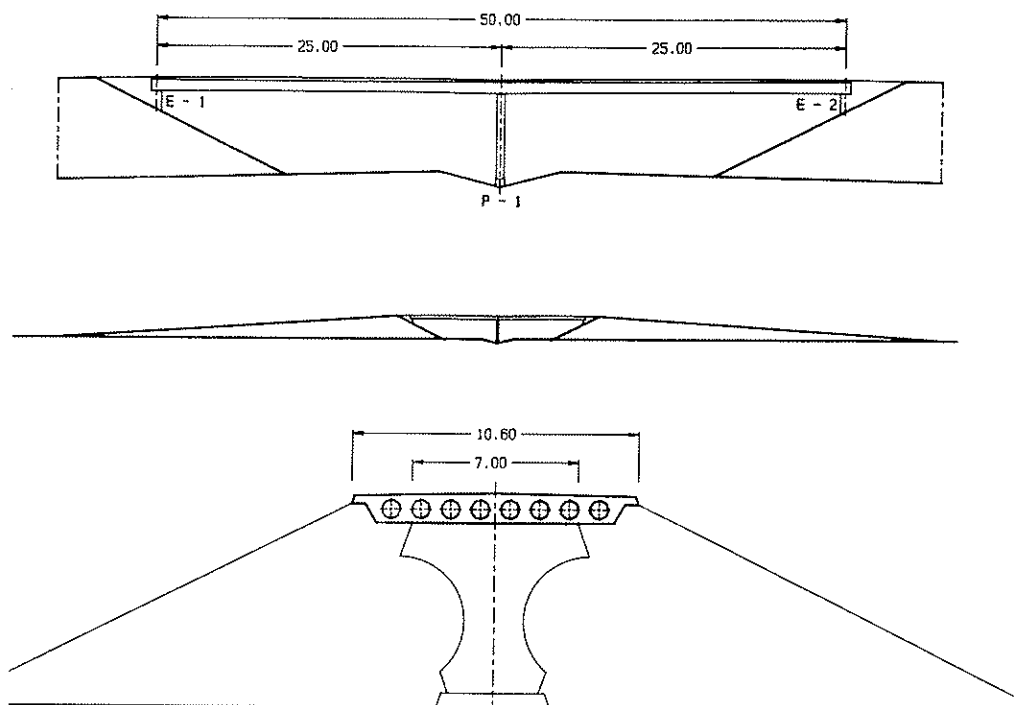


Figura 17. Paso superior de autopista.

dio de la influencia de los distintos parámetros será de un solo grado de libertad dinámico, ampliación de los empleados por J. P. Wolf [37], D. R. Somaini [24], [25], [26], Spyrakos [27] y Maragakis et al [19].

En la Fig. 18 se dibuja el modelo dinámico de estudio, que permite estudiar estructuras como las de la Fig. 17.

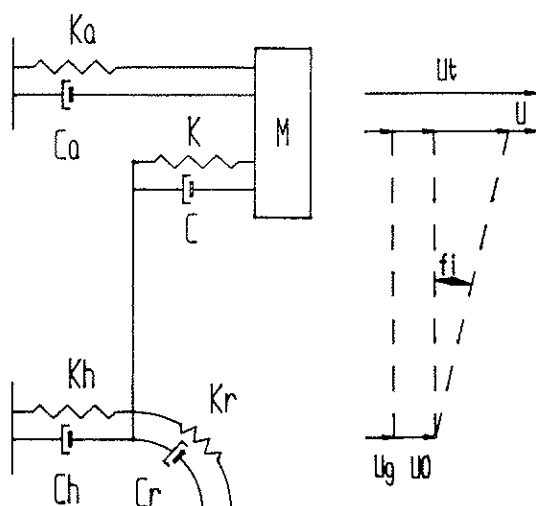


Figura 18. Modelo dinámico.

En él se representan las propiedades de inercia de pilas y tablero por  $m$ , y las propiedades de rigidez y amortiguamiento de las pilas por  $k$  y  $c$ . Las matrices de rigidez del suelo en la cimentación de

las pilas se representan, de forma simplificada, por las constantes de rigidez y amortiguamiento  $k_h, c_h, k_r, c_r$ ; y en los estribos por  $k_s$  y  $c_s$ .

La variable empleada como grado de libertad dinámico será el desplazamiento horizontal relativo,  $u$ , entre pila y tablero. De esta forma, el modelo, dentro de las hipótesis que se establezcan, permitirá estudiar los desplazamientos en el sentido longitudinal del tablero, o bien en el sentido transversal, con carácter independiente, utilizando las constantes de rigidez y amortiguamiento apropiadas en cada caso.

#### 5.1.1. Hipótesis básicas

Las hipótesis básicas que se establecen respecto al comportamiento del conjunto tablero, pilas, cimientos y estribos son las siguientes:

- *Comportamiento elástico lineal* de todos los materiales. Tablero, pilas y el suelo, en su interacción con los cimientos de las pilas y con el estribo.
- *Comportamiento rígido del tablero* en el plano horizontal. En tableros de puentes habituales, la rigidez en el plano horizontal es muy superior a la de las pilas y a la del conjunto estribo-relleno.
- *Tableros rectangulares*. El eje de apoyos y el eje longitudinal del tablero son perpendiculares. De esta forma, quedan fuera de este estudio los *tableros esviados*. Con esta hipótesis,

los movimientos horizontales quedan desacoplados, pudiéndose estudiar de manera independiente los movimientos en el eje longitudinal del tablero y en el eje transversal.

- *Concentración de la masa del puente en el tablero.* Se considera que la masa total del puente, constituida por la del tablero y las pilas y los elementos fijos, se concentra en el tablero. La masa principal de los puentes se concentra, realmente, en el tablero, masa propia, pavimentación, defensas y barandillas. La masa de las pilas, en general, es mucho más pequeña que la del tablero, por lo que el centro de masas se encuentra muy próximo a la del tablero.

La concentración de la masa total en el tablero permite obtener una respuesta global del conjunto pila-tablero, correcta. Sin embargo, para pilas muy altas, esta concentración de las masas puede dar lugar a resultados incorrectos para el estudio de la propia pila, ya que impide tener en cuenta los modos propios de vibración de la misma.

- *La vinculación entre pila y tablero,* generalmente, se realiza por aparatos de apoyo de material elastomérico. A efectos de modelización, se considerará que la rigidez horizontal de los mismos queda incorporada a la de las pilas. Respecto a la rigidez al giro se realizarán dos hipótesis extremas:
  - Articulación perfecta entre pila y tablero. Esta hipótesis equivale a suponer que los apoyos de material elastomérico no introducen ninguna rigidez al giro. Esta aproximación es bastante válida, debido a que la rigidez al giro de los mismos es muy baja comparada con la de las pilas.
  - *Empotramiento perfecto* entre pila y tablero. Con esta hipótesis se refleja la situación en la que no existen apoyos de neopreno entre la pila y el tablero. El empotramiento elástico real que se establece equivale a un empotramiento perfecto, debido a las rigideces relativas entre pila y tablero.
- *Los grados de libertad* considerados serán aquéllos que produzcan movimientos horizontales en el tablero:
  - *Movimiento horizontal en el cimiento de la pila:*  $u_p$ .
  - *Giro en el cimiento de la pila:*  $\phi$ .
  - *Movimiento horizontal relativo en la pila:*  $u$ .
- En el tratamiento de la *Interacción suelo-estructura* sólo se considerará la interacción inercial.

Se supondrá que los efectos de la interacción cinemática son lo suficientemente pequeños como para poder despreciarlos.

Se supondrá que el tablero es de una longitud

tal que los movimientos del suelo en la cimentación de la pila y en los estribos son idénticos.

- *Las matrices de rigidez dinámica del suelo* se considerarán desacopladas, por lo que para grado de libertad considerado se definirá una pareja de valores  $(k, c)$ , en general, variables con la frecuencia:
  - En la cimentación de la pila se consideran los pares de rigideces  $(k_{ps}, c_{ps})$  para el desplazamiento horizontal y  $(k_{\phi s}, c_{\phi s})$  para el giro.
  - En el estribo, se considera el par  $(k_a, c_a)$  para el desplazamiento horizontal.
- Se considera la posibilidad de disipación de energía en la estructura en forma de *amortiguamiento histerético*, caracterizado por los coeficientes  $c$  o  $\zeta$ . Este amortiguamiento se considerará concentrado en las pilas.

### 5.1.2 Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones de equilibrio en el dominio de la frecuencia serán:

$$S(\omega)u(\omega) = P(\omega) \quad (83)$$

donde:

$$S(\omega) = K + i\omega C - \omega^2 M \quad (84)$$

La aplicación del *método de las subestructuras*, tratado en la sección 2, conduce a las siguientes ecuaciones del movimiento para el caso de una sollicitación sísmica:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb} + S_{ib}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{ib}^e u_s^t \end{Bmatrix} \quad (85)$$

Si se realiza la descomposición del problema en *interacción cinemática e interacción inercial*, dado que se considerará, en este estudio, solamente la interacción inercial, las ecuaciones del movimiento serán:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb} + S_{ib}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^k \\ u_b^k \end{Bmatrix} \quad (86)$$

En este caso, todos los nudos de la estructura están en contacto con el suelo, por lo que todos los nudos son del tipo b:

$$[S_{ib}^e + S_{ib}^e] \{u_b^t\} = \omega^2 [M_{ib}^e] \{u_b^k\} \quad (87)$$

Los grados de libertad del movimiento total considerado serán:

$$\mathbf{u}_b^i = \{\mathbf{u}_b^i\}^T = [u_2 \quad u_1 \quad \varphi_1] \quad (88)$$

donde:

$u_2$ : es el desplazamiento total del tablero y la cabeza de pila.

$u_1$ : es el desplazamiento total de los cimientos de la pila.

$\varphi_1$ : es el giro total en la cimentación de la pila.

Las matrices de rigidez dinámicas del suelo serán:

- Para la cimentación de la pila:

$$\mathbf{S}_{bb_1}^s = \begin{bmatrix} k_s + i\omega c_s & 0 \\ 0 & k_s + i\omega c_s \end{bmatrix} \quad (89)$$

con

$$\mathbf{u}_{bb_1}^T = [u_1 \quad \varphi_1] \quad (90)$$

- Para el estribo:

$$\mathbf{S}_{bb_2}^s = [k_s + i\omega c_s] \quad (91)$$

con

$$\mathbf{u}_{bb_2} = \{u_2\} \quad (92)$$

La matriz de masas de la estructura será:

$$\mathbf{M}_{bb} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag} [m \ 0 \ 0] \quad (93)$$

La matriz de rigidez de la estructura será diferente según el tipo de vinculación entre pila y tablero:

- Si la pila está articulada en cabeza (momento flector nulo), condensando los grados de libertad, de una barra a flexión, será:

$$\mathbf{K}_{bb}^s = \begin{bmatrix} k & -k & -kh \\ -k & k & kh \\ -kh & kh & kh^2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

donde  $k$  es la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario en una viga empotrada-articulada:  $k = \frac{3EI}{h^3}$ :

- $E$ : módulo de elasticidad de la pila.
- $I$ : momento de inercia de la pila.
- $h$ : altura de la pila.

- Si la pila está empotrada en cabeza (giro nulo):

$$\mathbf{K}_{bb}^s = \begin{bmatrix} k & -k & -\frac{kh}{2} \\ -k & k & \frac{kh}{2} \\ -\frac{kh}{2} & \frac{kh}{2} & \frac{kh^2}{3} \end{bmatrix} \quad (95)$$

en este caso,  $k$  es la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario en una viga biempotrada:  $k = \frac{12EI}{h^3}$ , siendo  $E, I$  las características mecánicas, mencionadas, de la pila.

Los desplazamientos del suelo, si no se considera la interacción cinemática y haciendo la hipótesis de igualdad de los mismos en la base de las pilas y en los estribos resultan:

$$\mathbf{u}_b^s = \mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} u_e \\ u_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (96)$$

Es conveniente realizar un cambio de variables, en el que los desplazamientos totales correspondientes al nudo del tablero se transformarán en el desplazamiento relativo respecto al nudo de la base de la pila:

$$[u_2 \quad u_1 \quad \varphi_1] \rightarrow [u \quad u_0 \quad \varphi]$$

Las ecuaciones de cambio de variables serán:

- Para la pila articulada en cabeza (Fig. 18):

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + h\varphi_1 + u \\ u_1 &= u_0 \\ \varphi_1 &= \varphi \end{aligned} \quad (97)$$

- Para la pila empotrada en cabeza:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + \frac{h\varphi_1}{2} + u \\ u_1 &= u_0 \\ \varphi_1 &= \varphi \end{aligned} \quad (98)$$

En estas variables resulta sencillo plantear las ecuaciones de equilibrio directamente.

Si se realiza el cambio de variables de desplazamientos, las matrices de rigidez, referidas al vector de desplazamientos:

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{u}_b^T = [u \quad u_0 \quad \varphi] \quad (99)$$

resultarán, para:

- La pila articulada en cabeza, con  $k = 3EI/h^3$  y denominado  $\zeta_s$  al índice de amortiguamiento histerético:

$$\mathbf{S}(\omega) = -\omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k(1+2\zeta_s i) + k_s & k_s & k_s h \\ -k(1+2\zeta_s i) & k_h & 0 \\ -k(1+2\zeta_s i) h & 0 & k_r \end{bmatrix} +$$

$$+ i\omega \begin{bmatrix} c_s & c_s & c_s h \\ 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (100)$$

• El pilar empotrado en cabeza, con  $k = 12EI/H^3$ :

$$S(\omega) = -\omega^2 \begin{bmatrix} m & m & m \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k(1+2\zeta_s i) + k_s & k_s & k_s \frac{h}{2} \\ -k(1+2\zeta_s i) & k_h & 0 \\ -k(1+2\zeta_s i) \frac{h}{2} & 0 & k(1+2\zeta_s i) \frac{h^2}{12} + k_r \end{bmatrix} +$$

$$+ i\omega \begin{bmatrix} c_s & c_s & c_s \frac{h}{2} \\ 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (101)$$

El vector de cargas resultará, para ambos casos:

$$\omega^2 \mathbf{M}_{bb} \mathbf{u}_b^k = \omega_2 m \mathbf{u}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (102)$$

### 5.1.3 Solución en desplazamientos

Planteadas las ecuaciones del movimiento, para cada frecuencia de excitación es posible obtener los desplazamientos de los grados de libertad supuestos.

Con el fin de emplear variables adimensionales, se definirán los siguientes parámetros:

$$\omega_s^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_h^2 = \frac{k_h}{m} \quad \omega_r^2 = \frac{k_r}{mh^2} \quad \omega_a^2 = \frac{k_s}{m} \quad (103)$$

que definen frecuencias, mientras que

$$\zeta_h = \frac{c_h \omega}{2k_h} \quad \zeta_r = \frac{c_r \omega}{2k_r} \quad \zeta_s = \frac{c_s \omega}{2k_s} \quad (104)$$

definen los índices de amortiguamiento.

Se estudiarán las dos siguientes situaciones de vinculación entre pila y tablero: pila articulada y empotrada.

#### Pila articulada

A partir de la ec. 100

$$S(\omega) \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (105)$$

dividiendo por  $m$  y  $\omega^2$ , y con los parámetros definidos, la matriz de rigidez  $S(\omega)$  se expresará:

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1+2\zeta_s i) + \frac{\omega_a^2}{\omega^2} (1+2\zeta_s i) - 1 & -\frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1+2\zeta_s i) & -\frac{\omega_s^2}{\omega^2} h(1+2\zeta_s i) \\ \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1+2\zeta_s i) & \frac{\omega_h^2}{\omega^2} (1+2\zeta_h i) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_r^2}{\omega^2} h^2 (1+2\zeta_r i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_a^2}{\omega^2} (1+2\zeta_s i) - 1 & \frac{\omega_a^2}{\omega^2} h(1+2\zeta_s i) - h \\ \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1+2\zeta_s i) & 0 \\ 0 & \frac{\omega_r^2}{\omega^2} h^2 (1+2\zeta_r i) \end{bmatrix}$$

con el vector de desplazamientos y carga:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ u_b \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P} = \mathbf{u}_g \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones resulta:

$$u_g = \frac{\omega_s^2}{\omega_h^2} \frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_h i} u \quad (106)$$

$$\varphi = \frac{1\omega_s^2}{h\omega_r^2} \frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_r i} u \quad (107)$$

obteniéndose el desplazamiento  $u$  de la ec:

$$\left\{ (1+2\zeta_s i) + \frac{\omega_a^2}{\omega_s^2} (1+2\zeta_s i) - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} + \left[ \frac{\omega_a^2}{\omega_s^2} (1+2\zeta_s i) - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} \right] \frac{\omega_s^2}{\omega_h^2} \frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_h i} + \left[ \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2} (1+2\zeta_s i) - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} \right] \frac{\omega_s^2}{\omega_r^2} \frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_r i} \right\} u = \frac{\omega^2}{\omega_s^2} u_g \quad (108)$$

Con esta solución es posible estudiar, para cualquier variación de las rigideces y amortiguamientos, la respuesta del sistema.

La forma planteada es la única posible cuando las rigideces y amortiguamientos correspondientes a las matrices de rigidez dinámica del suelo son variables con la frecuencia de excitación.

#### Pila empotrada

En este caso, a partir de la ec. 101, dividiendo por  $m$  y  $\omega^2$ , y con los parámetros definidos, la matriz de rigidez  $S(\omega)$  se expresará:



$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1 + 2\zeta_i) + \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1 + 2\zeta_{si}) - 1 & \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1 + 2\zeta_{si}) - 1 & \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \frac{h}{2} (1 + 2\zeta_{si}) - \frac{h}{2} \\ - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (1 + 2\zeta_i) & \frac{\omega_h^2}{\omega^2} (1 + 2\zeta_{hi}) & \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \frac{h^2}{12} (1 + 2\zeta_{si}) + \frac{\omega_s^2}{\omega^2} h^2 (1 + 2\zeta_{si}) \\ - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \frac{h}{2} (1 + 2\zeta_i) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con el mismo vector de desplazamientos y carga que en el caso anterior.

Resolviendo las ecuaciones resulta:

$$u_a = \frac{\omega_s^2}{\omega_h^2} \frac{1 + 2\zeta_i}{1 + 2\zeta_{hi}} u \quad (109)$$

$$\varphi = \frac{2}{h} \frac{\omega_s^2 (1 + 2\zeta_i)}{\omega_s^2 (1 + 2\zeta_i) + 4\omega_i^2 (1 + 2\zeta_{si})} u \quad (110)$$

obteniéndose el desplazamiento  $u$  de la ec:

$$\left\{ (1 + 2\zeta_{si}) + \frac{\omega_s^2}{\omega_i^2} (1 + 2\zeta_{si}) - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + \left[ \frac{\omega_s^2}{\omega_i^2} (1 + 2\zeta_{si}) - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \right] \cdot \frac{\omega_s^2}{\omega_h^2} \frac{(1 + 2\zeta_i)}{(1 + 2\zeta_{hi})} + \left[ \frac{\omega_s^2}{\omega_i^2} (1 + 2\zeta_{si}) - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \right] \cdot \frac{\omega_s^2 (1 + 2\zeta_{hi})}{\omega_s^2 (1 + 2\zeta_i) + 4\omega_i^2 (1 + 2\zeta_{si})} \right\} u = \frac{\omega_s^2}{\omega_i^2} u_s \quad (111)$$

#### 5.1.4 Frecuencia equivalente

Una alternativa para interpretar de forma adecuada los resultados será obtener la frecuencia y el amortiguamiento equivalente de un sistema de un grado de libertad.

La respuesta  $u$  de un sistema de un solo grado de libertad, en el dominio de la frecuencia, de frecuencia natural  $\bar{\omega}$  e índice de amortiguamiento  $\bar{\zeta}$  sometido a una aceleración del suelo  $\bar{u}_s$  será:

$$\left[ 1 + 2\bar{\zeta}_i - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} \right] u = \frac{\omega_s^2}{\bar{\omega}^2} \bar{u}_s \quad (112)$$

#### Pila articulada

De la ec. 108 es posible obtener la frecuencia equivalente  $\bar{\omega}$ , sin más que considerar el sistema libre de amortiguamiento  $\zeta_s = \zeta_h = \zeta_r = \zeta_a = 0$ . La frecuencia de excitación que hace que el coeficiente correspondiente al desplazamiento  $u$  sea nulo,  $\omega = \bar{\omega}$ , es la frecuencia equivalente buscada. Estrictamente, esta frecuencia que hace singular la respuesta para el sistema no amortiguado, no es exactamente la frecuencia que, para el sistema amortiguado, da lugar a la respuesta máxima. Sin

embargo, ambas están muy próximas y, a efectos prácticos, pueden ser consideradas iguales.

La expresión de la frecuencia equivalente será:

$$\bar{\omega}^2 = \omega_s^2 + \frac{1}{\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2}} \quad (113)$$

Cuando la rigidez del estribo es nula,  $\omega_s = 0$ , la frecuencia equivalente coincide con la de un sistema en el que las flexibilidades de la cimentación y la estructura se suman.

#### Pila empotrada

En este caso, se considera el sistema no amortiguado de la ec. 111, obteniéndose la siguiente expresión para la frecuencia equivalente:

$$\bar{\omega}^2 = \omega_s^2 + \frac{1}{\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\frac{\omega_i^2}{4} + 4\omega_i^2}} \quad (114)$$

#### 5.1.5. Amortiguamiento equivalente

Es posible obtener un índice de amortiguamiento equivalente  $\bar{\zeta}$  (ec. 112) que pondera la tipificación de los diferentes amortiguamientos en la respuesta global del sistema en estudio.

Es posible *linealizar* las ecs. 108 y 111, realizando aproximaciones del tipo:

$$\frac{1 + 2\zeta_{si}}{1 + 2\zeta_{hi}} = \frac{(1 + 2\zeta_{si})(1 + 2\zeta_{hi})}{1 + 4\zeta_{si}^2} \sim 1 + 2\zeta_{si} - 2\zeta_{hi}$$

$$\frac{1 + 2\zeta_{si}}{1 + 2\zeta_{ri}} = \frac{(1 + 2\zeta_{si})(1 + 2\zeta_{ri})}{1 + 4\zeta_{si}^2} \sim 1 + 2\zeta_{si} - 2\zeta_{ri}$$

en el que se supone, debido a que los índices de amortiguamiento son inferiores a la unidad, que los productos  $\zeta_i \zeta_j \ll 1$  por tanto despreciables frente a la unidad, para cualquier pareja de índices  $i, j$ .

Con estas aproximaciones, se pueden obtenerse expresiones del índice de amortiguamiento del tipo:

$$\bar{\zeta} = F_s \zeta_s + F_h \zeta_h + F_r \zeta_r + F_a \zeta_a \quad (115)$$

donde los factores  $F_s$ ,  $F_h$ ,  $F_r$  y  $F_a$  representan los coeficientes de participación de los índices amortiguamiento de la estructura, la rigidez al desplazamiento y al giro de la cimentación y de la rigidez al desplazamiento del estribo, respectivamente, en el índice de amortiguamiento total equivalente.

Estos coeficientes se han obtenido para un valor de la frecuencia de excitación igual a la frecuencia equivalente, que es cuando los índices de amortiguamiento tienen cierta importancia en la respuesta del sistema.

Las expresiones de los coeficientes de participación serán diferentes según las condiciones de vinculación de la pila.

#### Pila articulada

$$F_s = \frac{1}{\omega_s^2 \left[ \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \right]} = \frac{1}{1 + \frac{k}{k_h} + \frac{k}{k_r}}$$

$$F_h = \frac{1}{\omega_h^2 \left[ \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \right]} = \frac{\frac{k}{k_h}}{1 + \frac{k}{k_h} + \frac{k}{k_r}}$$

$$F_r = \frac{1}{\omega_r^2 \left[ \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \right]} = \frac{\frac{k}{k_r}}{1 + \frac{k}{k_h} + \frac{k}{k_r}}$$

$$F_a = \omega_s^2 \left[ \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \right] = \frac{k}{k_a} \left[ 1 + \frac{k}{k_h} + \frac{k}{k_r} \right] \quad (116)$$

#### Pila empotrada

$$F_s = \frac{\frac{1}{\omega_s^2} + \frac{3\omega_r^2}{(\omega_s^2 + 12\omega_r^2)^2}}{\frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{3}{\omega_r^2 + 12\omega_r^2}} = \frac{1 + \frac{3}{(1+12k/k)^2}}{1 + \frac{k}{k_h} + \frac{3}{1+12k/k}}$$

$$F_h = \frac{1}{\omega_h^2 \left[ \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{3}{\omega_r^2 + 12\omega_r^2} \right]} = \frac{\frac{k}{k_h}}{1 + \frac{k}{k_h} + \frac{3}{1+12k/k}}$$

$$F_r = \frac{\frac{36\omega_r^2}{(\omega_s^2 + 12\omega_r^2)^2}}{\frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{3}{\omega_r^2 + 12\omega_r^2}} = \quad (117)$$

$$= \frac{36k/k}{(1+12k/k)^2} \frac{1}{1 + \frac{k}{k_h} + \frac{3}{1+12k/k}}$$

$$F_a = \omega_s^2 \left[ \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{3}{\omega_s^2 + 12\omega_r^2} \right] =$$

$$= \frac{k}{k_a} \left[ 1 + \frac{k}{k_h} + \frac{3}{1+12k/k} \right]$$

#### 5.1.6 Aceleración equivalente

A partir de la ec. 112, se deduce que la aceleración equivalente en el sistema de un grado de libertad será:

$$\bar{u}_e = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_s^2} u_e \quad (118)$$

que se obtiene, de forma inmediata, una vez conocida la frecuencia equivalente.

### 5.2. Frecuencia y Amortiguamiento equivalente

Una vez obtenidos los parámetros fundamentales que influyen en la frecuencia y el amortiguamiento equivalente del sistema en estudio, se estudiará cómo varían en función de las características de rigidez y amortiguamiento de la estructura y del suelo.

Para ello, en primer lugar se realizará un pequeño estudio del rango de variación de las distintas variables involucradas en los *Pasos superiores de autopista*. Con estas variables y unas simplificaciones adicionales, se podrá realizar un estudio paramétrico.

Una primera aproximación a un contraste experimental de estos resultados, lo proporciona la aplicación al Paso Superior de autopista de Meloland Road, en California, del que se dispone de datos experimentales ante movimientos sísmicos y sus correspondientes análisis de resultados llevados a cabo por Werner et al [30], Levine et al [16] y Wilson y Tan [35], [36].

#### 5.2.1 Rango de las variables

Con el fin de obtener valores razonables de los distintos parámetros, estudiaremos situaciones extremas del tablero y pilas, así como del terreno.

Se ha construido una tabla de doble entrada (Tabla 1), para el terreno y la estructura, indicándose los valores más representativos con las siguientes hipótesis:

- Para la *estructura*, tablero y pilas, se han considerado dos hipótesis extremas de un paso superior de autopista, de dos vanos iguales.

Se denomina *estructura pequeña* la correspondiente a una sola calzada sobre una autopista sin mediana (luz de 15 m y anchura de 12 m), y *estructura grande* la correspondiente a dos calzadas, sobre una autopista con mediana (luz de 25 m y anchura de 23 m).

**Tabla 1**  
**Variación de parámetros**

Terreno Cimentación	Estructura					
	Pequeña			Grande		
	h/L	k/kh	ka/k	h/L	k/ka	ka/k
Bueno	2.40	0.05	3.50	1.40	0.15	0.70
Mediocre	1.20	0.10	3.50	0.80	0.30	0.70

Se considera la vinculación entre pila y table-ro como articulada.

- Para la *cimentación* de las pilas se estudiarán valores de las rigideces y amortiguamientos correspondientes a cimentaciones superficia-les del tipo zapata.

Si bien los valores de estas rigideces dinámi-cas son variables con la frecuencia de excita-ción, esta variación es pequeña, por lo que, como primera aproximación, se pueden consi-derar los valores constantes [37], [23]:

$$k_h = \frac{8GL}{2-v} \quad c_h = \frac{4.6GL^3}{(2-v)c_s} \quad (119)$$

$$k_r = \frac{8GL^3}{3(1-v)} \quad c_r = \frac{0.4GL^4}{(1-v)c_s} \quad (120)$$

donde  $G$  es el módulo de elasticidad transversal del suelo,  $L$  es el radio de la zapata,  $v$  es el coefi-ciente de Poisson del suelo y  $c_s$  es la velocidad de propagación de las ondas transversales en el suelo.

Si estas rigideces se expresan de la forma habi-tual, extrayendo la componente estática:

$$\begin{aligned} k_h &= k_{est,h}(k_x + ia_0 c_x) \\ k_r &= k_{est,r}(k_\phi + ia_0 c_\phi) \end{aligned} \quad (121)$$

los valores anteriores equivalen a considerar:

$$k_x = 1 \quad c_x = 0.575 \quad (122)$$

$$k_\phi = 1 \quad c_\phi = 0.150 \quad (123)$$

donde las componentes de rigidez son iguales a la componente estática. Teniendo en cuenta la rela-ción que existe entre la rigidez al giro y al despla-zamiento horizontal de la zapata circular, los coe-ficientes de participación del amortiguamiento de la cimentación de la pila pueden agruparse en uno solo,  $F_{\zeta_0}$ :

$$\zeta = F_x \zeta_x + F_{\zeta_0} \zeta_0 + F_z \zeta_z \quad (124)$$

- El *terreno de cimentación* se considera com-patible con una cimentación superficial.

Para un buen terreno, se considera una veloci-dad de propagación de las ondas de corte,

$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 200$  m/s, y para un terreno de cimenta-ción mediocre, una velocidad de propagación en torno a 100 m/s.

Las zapatas correspondientes se han dimensio-nado considerando un asiento admisible de 0,01 m.

- El *suelo del terraplén* tras el estribo, se ha considerado como un terreno medio, igual en ambas situaciones, ya que, generalmente, las propiedades del terraplén y el relleno son indeper lientes de las condiciones del suelo de cimentación.

Los valores de  $k_s$  indicados son los correspon-dientes a la rigidez estática en el sentido longitu-dinal, para el caso del semiespacio:

$$k_s = 6.07 \frac{GH}{2-v} \quad (125)$$

donde  $H$  es la altura del estribo. Se considera, a efectos del estudio, una altura del muro idéntica a la de las pilas  $H = h$ .

### 5.2.2 Estudio paramétrico

Las variables adimensionales que se emplearán en el estudio serán las utilizadas en [37]:

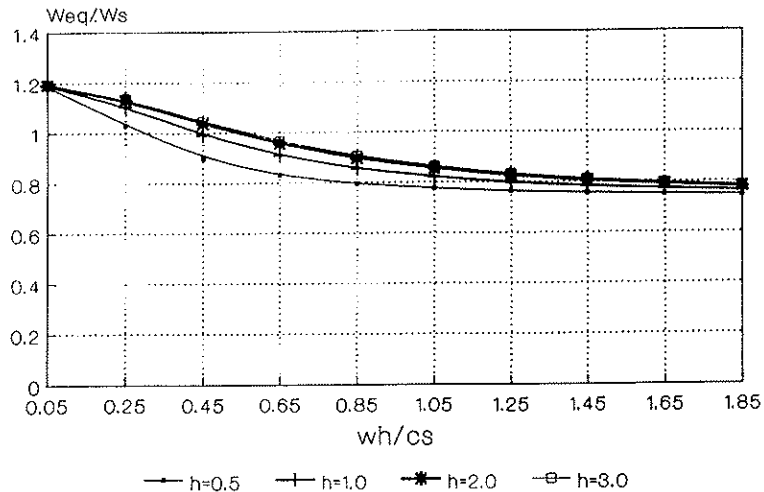
- Respecto a la dimensión característica de la cimentación de la pila  $L = a$ :

$$\bar{h} = \frac{h}{a} \quad \bar{m} = \frac{m}{\rho a^3} \quad \bar{s} = \frac{\omega_s h}{c_s} \quad (126)$$

- Respecto a la dimensión característica del estribo,  $H$ :

$$\bar{H} = \frac{h}{H} \quad \bar{M} = \frac{m}{\rho H^3} \quad \bar{S} = \frac{\omega_s H}{c_s} \quad (127)$$

### RELACION DE FRECUENCIAS m1=10 ka/k=0.70



### AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE m1=10 ka/k=0.70

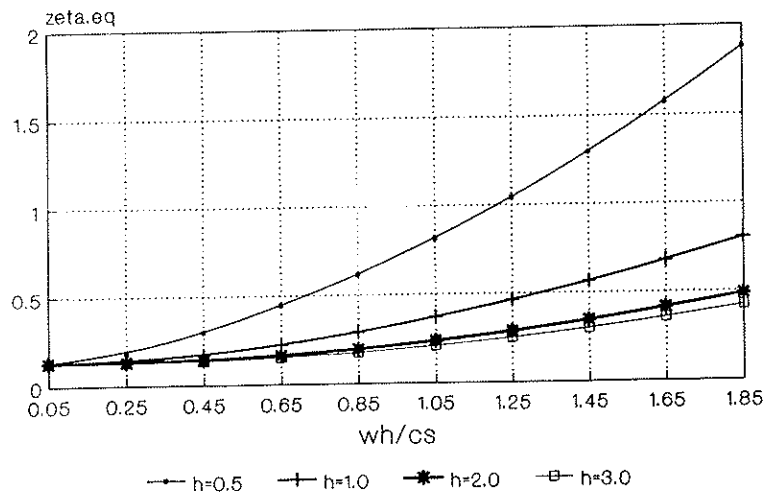


Figura 19. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de  $\bar{h}$ . Pila articulada.

donde

- $h$  es la altura de las pilas.
- $a$  es una dimensión característica de la cimentación: el radio.
- $\rho$  es la densidad del suelo.
- $c_s$  es la velocidad de propagación de las ondas transversales en el suelo.
- $H$  es una dimensión característica del estribo: la altura.

En estas variables es posible expresar los cocientes de rigideces e índices de amortiguamientos que permiten obtener la frecuencia y el índice de amortiguamiento equivalente del sistema:

$$\frac{k_a}{k} = \frac{k_{sa}}{S^2 M} \quad \frac{k}{k_b} = \frac{\bar{s}^2 \bar{m}}{8} \frac{(2-\nu)}{\bar{h}^2 k_s} \quad (128)$$

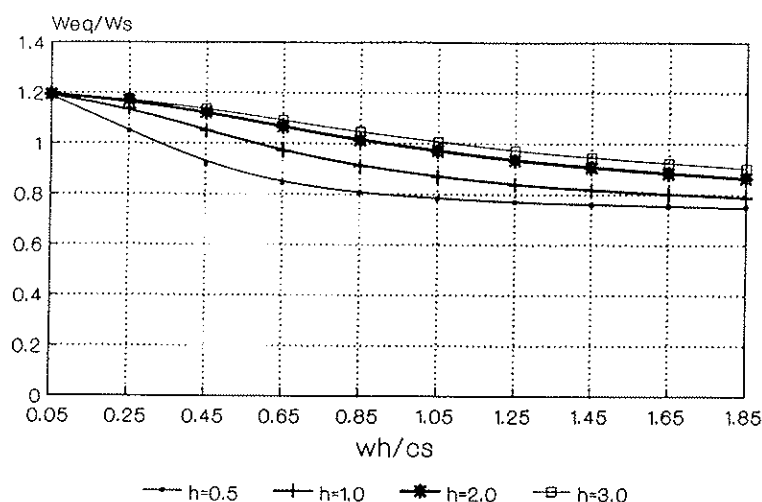
$$\frac{k}{k_t} = \frac{\bar{s}^2 \bar{m}}{8} \frac{3(1-\nu)}{k \phi}$$

$$\zeta_h = \frac{c_s a_0}{2k_s} = \frac{c_s}{2k_s} \frac{\bar{s}}{\bar{h}} \frac{\omega}{\omega_s}$$

$$\zeta_r = \frac{c_s a_0}{2k_\phi} = \frac{c_s}{2k_\phi} \frac{\bar{s}}{\bar{h}} \frac{\omega}{\omega_s} \quad (129)$$

$$\zeta_a = \frac{c_{sa} \bar{a}_0}{2k_{sa}} = \frac{c_{sa}}{2k_{sa}} \bar{s} \frac{\omega}{\omega_s}$$

# RELACION DE FRECUENCIAS m1=10 ka/k=0.70



# AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE m1=10 ka/k=0.70

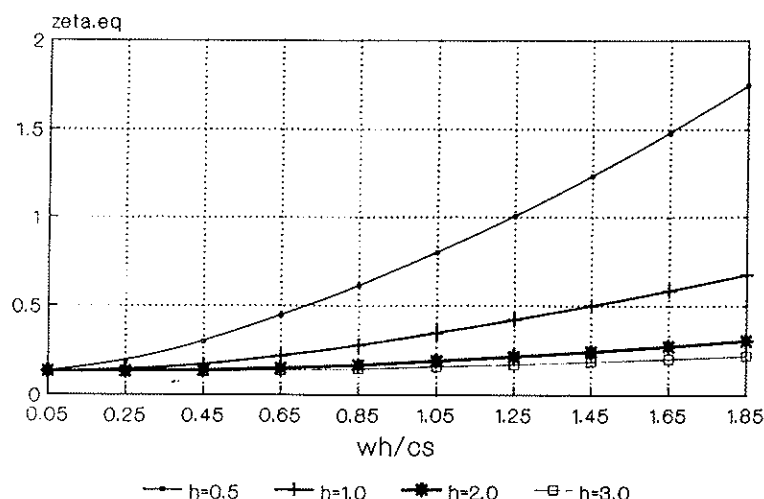


Figura 20. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de  $\bar{h}$ . Pila empotrada.

Donde  $k_s$ ,  $k_\phi$ ,  $c_s$  y  $c_\phi$  son los coeficientes de Veletsos correspondientes a la cimentación de las zapatas, en general variables con la frecuencia adimensional,  $\bar{\omega}_0 = \omega a/c_s$ , pero que pueden ser considerados constantes para un espectro muy amplio de las mismas.

Los coeficientes  $k_{sa}$  y  $c_{sa}$  representan los coeficientes de Veletsos correspondientes al estribo, variables con la frecuencia adimensional,  $\bar{\omega}_0 = \omega H/c_s$ .

Los índices de amortiguamiento son variables con la frecuencia de excitación  $\omega$ ; sin embargo, estos coeficientes tienen incidencia grande en la respuesta cuando  $\omega = \bar{\omega}$ .

Para la consideración de los coeficientes de rigidez del estribo, variable con la frecuencia de

excitación, ha sido necesario resolver un problema no lineal, sencillo, del tipo:

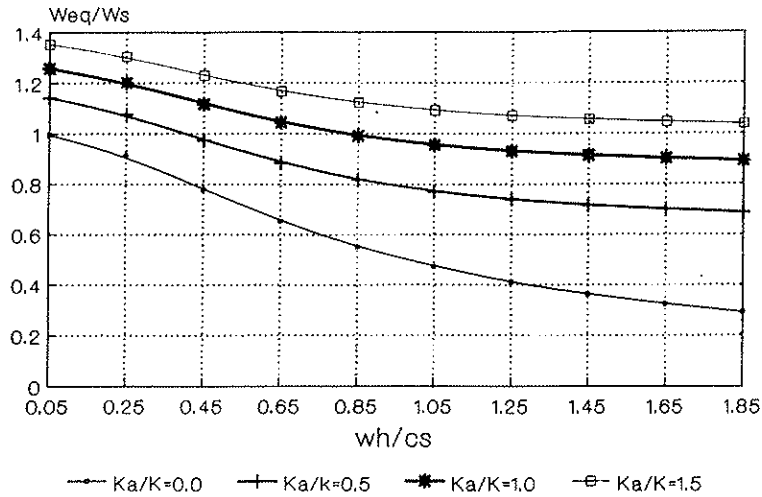
$$\begin{cases} \bar{\omega} = f(k_{sa}) \\ k_{sa} = g(\bar{\omega}) \end{cases} \quad (130)$$

para obtener la frecuencia equivalente. La solución del mismo se realiza por iteraciones.

Los parámetros básicos que se han estudiado son la variable de esbeltez de la pila, caracterizada por  $\bar{h}$ , y la rigidez relativa del estribo,  $ka/k$ , con respecto a la rigidez relativa estructura-suelo, definida por el parámetro  $\bar{s}$ .

Los parámetros de masa  $\bar{m}$  y los coeficientes de rigideces adimensionales correspondientes a

### RELACION DE FRECUENCIAS $m=10 \quad h=2$



### AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE $m=10 \quad h=2$

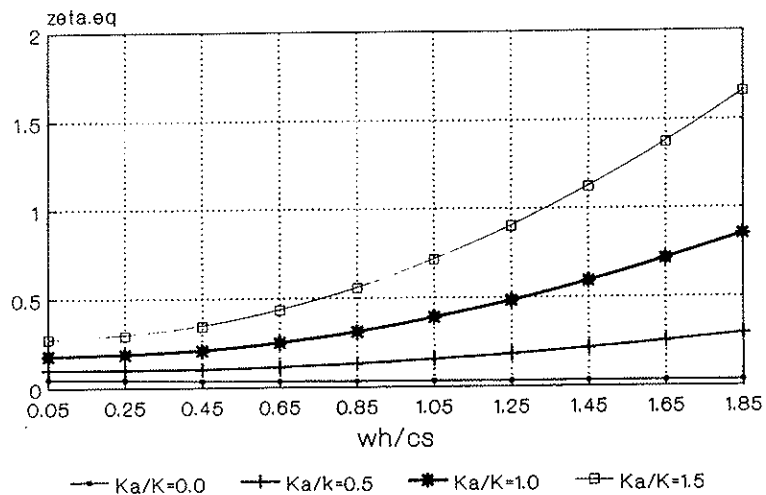


Figura 21. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de  $k_a/k$ . Pila articulada.

las cimentaciones de las pilas, se mantienen constantes. Para estos últimos se consideran los valores, constantes con la frecuencia, válidos para zapatas circulares, de la sec. anterior.

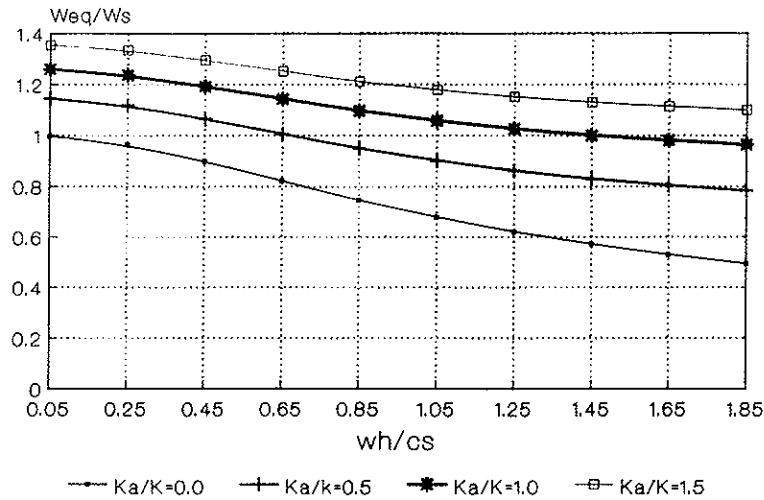
Estos estudios se han realizado para las dos hipótesis extremas de pila articulada y empotrada (Figs. 19 a 22):

- La variación con respecto al parámetro  $\bar{h}$  (Figs. 19, 20), para  $k_a/k = 0,7$  y  $\bar{m} = 10$  muestra que los efectos de interacción son tanto más importantes cuanto menos esbelta es la pila ( $\bar{h}$  decreciente) y más rígida es la estructura respecto al suelo de cimentación ( $\bar{s}$  creciente).

Los fenómenos de interacción se activan disminuyendo la frecuencia equivalente de vibración y aumentando el amortiguamiento equivalente. Estas variaciones debidas a los fenómenos de interacción son ligeramente más acusadas en el caso de la pila articulada que en la pila empotrada, debido a que en el último caso los desplazamientos son inferiores.

- La variación con respecto al parámetro  $k_a/k$  (Figs. 21, 22), para  $\bar{h} = 2$  y  $\bar{m} = 10$  demuestra, en este caso, que las variaciones de las frecuencias son mayores cuanto menor es la rigidez relativa del estribo, siendo máxima cuando no existe esta vinculación  $k_a/k = 0$ .

### RELACION DE FRECUENCIAS $m1=10 \quad h1=2$



### AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE $m1=10 \quad h1=2$

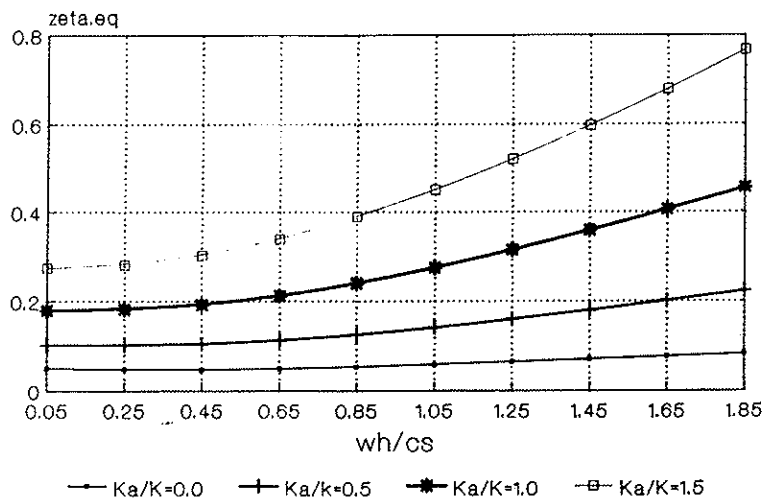


Figura 22. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de  $k_r/k$ . Pila empotrada.

Por el contrario, la presencia del estribo aumenta de forma considerable el amortiguamiento equivalente.

En este caso, la diferente vinculación de la pila y tablero tiene una importancia mayor. La pila articulada provoca mayores desplazamientos del tablero y, por tanto, mayores amortiguamientos por la presencia del estribo, que en el caso de pila empotrada.

#### 5.2.3 Paso superior de Meloland Road

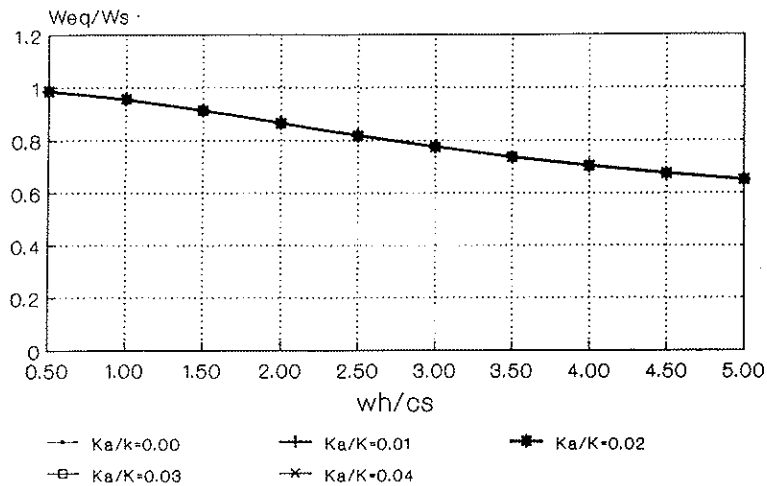
Los resultados, hasta ahora obtenidos, pueden

ser contrastados con las observaciones realizadas por Wilson y Tan, [35], [36] sobre el análisis de los movimientos medidos en el Paso Superior de Meloland Road, en California, ante el movimiento sísmico de 1979 en el Imperial Valley.

Varias de las observaciones realizadas en su trabajo, pueden explicarse a la luz de los resultados obtenidos anteriormente.

- Se detectan importantes caídas de la rigidez del conjunto estribo-terraplén durante el movimiento, en torno al 50%. Estas reducciones de rigidez fueron explicadas por el comportamiento no lineal del terre-

### RELACION DE FRECUENCIAS Meloland Road



### AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE Meloland Road

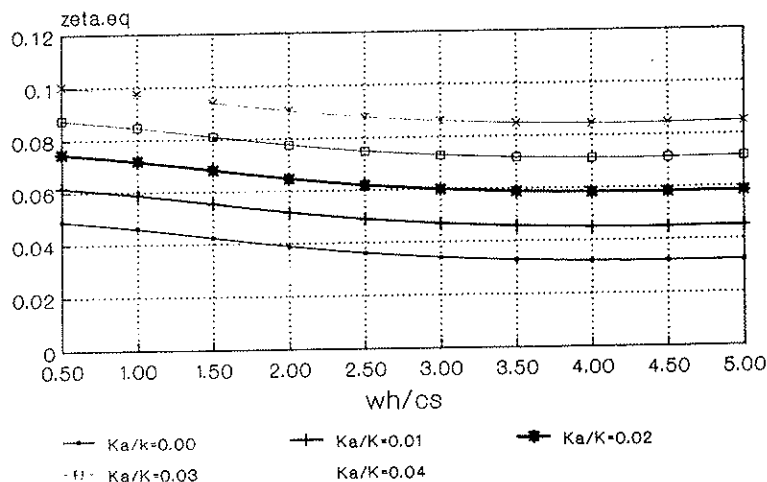


Figura 23. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Paso Superior de Meloland Road.

- no durante el movimiento.
- El análisis de las componentes de rigidez de estribo tipo tridimensional, demuestran que éstas son claramente decrecientes con la frecuencia; y a la vista de estos resultados se pueden obtener rigideces, con respecto a la componente estática, en torno a dicha cifra o incluso inferiores:
- Uno de los modos más importantes es el transversal, con una frecuencia de 2,5 Hz. Para las características del terreno de  $c_v = 67$  m/s y del estribo  $H = 5$  m, equivale a una frecuencia adimensional,  $\bar{a}_0 = 1,2$ , que para la rigidez transversal del estribo sobre base rígi-

da (eje Y) da lugar a coeficientes adimensionales:

$$k_y \in [0,1; 0,5] \quad c_y \in [0,3; 0,8] \quad (131)$$

- dependiendo de la profundidad del estrato.
- Estos coeficientes indican pérdidas de rigidez del 50 al 90% y amortiguamientos dentro del intervalo:

$$\zeta_y \in [0,30; 0,50] \quad (132)$$



- La identificación de sistemas detecta índices de amortiguamientos necesarios, del 25 al 45%. Esta gama de valores queda incluida en el intervalo obtenido anteriormente.
- Los índices de amortiguamiento equivalentes del sistema, incluyendo el efecto de los estribos oscila entre el 3 y el 12%.

Si se consideran los siguientes valores de la estructura:

$$\bar{h} = 40 \quad \bar{m} = 200000 \quad \bar{M} = 4 \quad \zeta_s = 0,05 \quad (133)$$

y no se consideran los efectos de interacción en los cimientos de las pilas, se pueden obtener la frecuencia equivalente y los índices de amortiguamiento para distintas relaciones de rigidez del estribo y diferentes frecuencias (Fig. 23).

En la hipótesis de pila empotrada en cabeza, que corresponde a la situación del Paso superior en estudio, se obtiene un rango de variación del índice de amortiguamiento, del 3 al 10%.

## 6. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se derivan del trabajo realizado son las siguientes:

- Los análisis realizados de estructuras instrumentadas sometidas a movimientos sísmicos o bien mediante experimentos realizados *in situ*, demuestran una influencia significativa de los cimientos de las pilas y de los estribos, en ciertos modos de la respuesta dinámica de la estructura, especialmente introduciendo altos amortiguamientos. Esta influencia se produce en aquellos casos en los que el tablero entra en contacto con el estribo, bien por razones accidentales o por consideraciones de proyecto.
- Las ecuaciones generales de la interacción suelo-estructura, en el rango lineal, se pueden aplicar al estudio de los fenómenos de interacción que se presentan en los puentes. Es posible dividir el cálculo en tres etapas: cálculo de la rigidez dinámica del suelo, cálculo del movimiento difractado y finalmente el cálculo acoplado incorporando las matrices de rigidez del suelo y la estructura.
- Mediante la aplicación del Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) en el dominio de la frecuencia, es posible obtener las matrices de rigidez dinámica, en forma adimensional, del conjunto relleno-estribo, para las configuraciones más habituales de los mismos tanto en dos como en tres dimensiones.

- Se ha realizado un modelo analítico de un grado de libertad dinámico, en el que se estudian los efectos de interacción inercial, al incluir las rigideces dinámicas del suelo en las pilas y estribos.

Se pueden obtener, en determinadas hipótesis, expresiones analíticas para la determinación de la frecuencia equivalente y el amortiguamiento equivalente, en dos hipótesis de vinculación pila-tablero: pila articulada y pila empotrada.

- Las variaciones más importantes en la frecuencia, se obtienen para estructuras rígidas, comparadas con el suelo, y con relaciones bajas de rigidez del estribo respecto a la estructura.
- Los índices de amortiguamiento equivalentes aumentan conforme aumenta la relación de rigidez de la estructura a la del suelo y la relación de rigidez del estribo respecto a la de la estructura.
- Con el modelo analítico, se han representado las características de un puente instrumentado, del que se disponen datos sobre la respuesta a un movimiento sísmico moderado.

Los datos de rigideces dinámicas obtenidas, permiten explicar las reducciones de rigidez observadas en el conjunto relleno-estribo, así como el orden de magnitud de los índices de amortiguamiento locales en el estribo y su repercusión en el amortiguamiento global de la estructura completa.

## REFERENCIAS

- [1] ALARCON, E. "Problemas de interacción terreno-estructura" (Curso doctorado).
- [2] BALAS, J. SLADEK, J. SLADEK, V. "Stress Analysis by Boundary Element Methods". Elsevier Amsterdam, 1989.
- [3] BONNET, M. "Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique." These Ecole Nat. des Ponts & Chaussées, Paris, 1986.
- [4] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.
- [5] CANET, J.M. BARBAT, A.H. "Estructuras sometidas a Acciones Sísmicas. Cálculo por ordenador CIMNE", Barcelona, 1988.
- [6] CANO HURTADO, J.J. "Cálculo de impedancias dinámicas de zapatas circulares rígidas en terrenos estratificados con amortiguamiento histerético. Aplicación a Centrales Nucleares". Tesis Doctoral. E.T.S. Ingenieros Industriales de Valencia, 1985.

- [7] CHEN, M.C., PENZIEN, J. "Soil-structure interaction of short highway bridges". *Proceedings of a Workshop on Earthquake Resistance of Highway Bridges*. Applied Technology Council. pp 434 January, 1979.
- [8] CHEN, G., ZHU, J. *Boundary Element Methods*. Academic Press. Hancourt Brace, 1992.
- [9] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. *Dynamics of Structures* Mc Graw-Hill, 1982.
- [10] CROUSE, C.B., HUSHMAND, B. MARTIN, G.R. "Dynamic soil-structure interaction of a single-span bridge". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp 711-729, 1987.
- [11] CRUSE, T.A., RIZZO, F.J. "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I", *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 22 pp 244-259, 1968.
- [12] CRUSE, T.A. "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 22 pp 341-355, 1968.
- [13] DOMINGUEZ, J., ALARCON, E. "Elastodynamics", Chapter 7, *Progress in Boundary Element Methods*. Ed. Brebbia, C.A., Vol. 1, pp. 213-257. Pentech Press, London, 1981.
- [14] DOMINGUEZ, J., ABASCAL, R. "Dynamics of foundations". *Topics in boundary element research*. Vol. 4, ed. C.A. Brebbia pp. 27-75. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [15] GUPTA, A.K. *Response Spectrum Method in Seismic Analysis and Design of Structures*. Blackwell Scientific Publications. Boston, 1990.
- [16] LEVINE, M.B., SCOTT, R.F. "Dynamic response verification of simplified bridge-foundation model". *J. Geotechnical Eng.*, ASCE, Vol. 115, N° 2, pp. 1.246-261, 1989.
- [17] MANOLIS, G.D., BESKOS, D.E. "Boundary Element Methods in Elastodynamics". Unwin Hyman. London, 1988.
- [18] MARAGAKIS, E.A., JENNINGS, P.C. "Analytical models for the rigid body motions of skew bridges". *Earth. Eng & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp 923-944, 1987.
- [19] MARAGAKIS, E.A., THORNTON, G., SAHDI, M., SIDDHARTHAN, R. "A simple non-linear model for the investigation of the effects of the gap closure at the abutments joints of short bridges". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 1.163-1.178, 1989.
- [20] MARTINEZ CUTILLAS, A., ALARCON, E., GOMEZ-LERA, M.S., CHIRINO, F. "Application of Boundary Element Method to the analysis of bridge abutments". *14th. International Conference on Boundary Element Methods*, Sevilla, 1992.
- [21] MARTINEZ CUTILLAS, A. *Cálculo de la rigidez dinámica de estribos de puentes*. Tesis Doctoral. E.T.S.Ingenieros Industriales de Madrid, 1993.
- [22] NEWMARK, N.M., VELETOS, A.S. "Design procedures for shock isolation systems of underground protective structures, Vol. III, Response spectra of a single degree of freedom elastic and inelastic systems". *Report for Air force Weapons Laboratory*. Newmark, Hansen and Associates, RTD TDR 63-3096, 1964.
- [23] SIEFFERT, J.C., CEVAER, F. *Handbook of impedance functions. Surface foundations*. Quest Editions. Presses Academiques, Nantes, 1992.
- [24] SOMAINI, D.R. "Parametric study on soil-structure interaction of bridges with shallow foundations". *Proc. 8th. World Conf. on Earth. Eng.*, San Francisco, 1984.
- [25] SOMAINI, D.R. "A simplified mathematical model for the investigation of the seismic behaviour of bridges with fixed columns taking soil-structure interaction into account". *Proc. 8th. Eur. Conf. on Earth. Eng.*, Lisbon, 1986.
- [26] SOMAINI, D.R. "Seismic behaviour of girder bridges for horizontally propagating waves". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp. 777-793, 1987.
- [27] SPYRAKOS, C.C. "Assesment of SSI on the longitudinal seismic response of short span bridges". *Eng. Struct.*, Vol. 12, pp 60-66, 1990.
- [28] SPYRAKOS, C.C. "Methods of dynamic analysis of structural systems". *Structural Dynamics, Kratzig et al (eds).*, pp 771-778 Balkema, Rotterdam, 1990.
- [29] TAJIMI, H. "Dynamic earth pressures on basement wall". *Proc. 5th. World Conf. on Earth. Eng.*, Rome, 1973.
- [30] WERNER, S.D., BECK, J.L., LEVINE, M.B. "Seismic response evaluation of Meloland road overpass using 1979 Imperial Valley Earthquake records". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp 249-274, 1987.
- [31] WHEELER, L.T., STERNBERG, E. "Some theorems in classical elastodynamics". *Arch. Rational Mech. Anal.* Vol. 31 pp 51-90, 1968.
- [32] WHITMAN, R.V., BIELAK, J. "Foundations", Chapter 7. *Design of Earthquake Resistant Structures*. Ed. Rosenblueth, E. pp. 223-260. Pentech Press, London, 1980.
- [33] WILSON, J.C. "Stiffness of non-skew monolithic bridge abutments for seismic analysis". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 16, pp 867-883, 1988.

[34] WILSON, J.C. "Analysis of the observed seismic response of a highway bridge". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 14, pp 339-354, 1986.

[35] WILSON, J.C., TAN, B.S. "Bridge abutments: formulation of simple model for earthquake response analysis". *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 116 (8), pp 1828-1837, 1990.

[36] WILSON, J.C., TAN, B.S. "Bridge abutments: assessing their influence on earthquake response of Meloland Road Overpass". *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 116 (8), pp 1838-1856, 1990.

[37] WOLF, J.P. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice-Hall, 1985.

[38] WOLF, J.P. *Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain*. Prentice-Hall, 1988.

[39] WOOD, J. *Earthquake-induced soil pressures on structures*. PhD. Thesis. Caltech. Pasadena, 1973.

## RESUMEN

Los datos obtenidos de puentes instrumentados en zonas sísmicas, demuestran la importancia que tienen los estribos en la respuesta dinámica de la estructura. Si bien existen modelos que permiten estudiar la incidencia de las cimentaciones de las pilas, no existe ningún modelo analítico ni numé-

rico que permita acotar la incidencia de los estribos. En este trabajo se presentan modelos de Elementos de Contorno en el dominio de la frecuencia, tanto en dos como en tres dimensiones, así como el cálculo de las rigideces dinámicas de los estribos, en forma adimensional, para las tipologías más habituales. Finalmente, en un modelo analítico sencillo de un tablero de puente en el que se incorporan los efectos de interacción inercial en la cimentación de pilas y estribos, se analizan las variables de la respuesta dinámica modificada.

## SUMMARY

Strong motion records obtained in instrumented short-span bridges show the importance of the abutments in the dynamic response of the whole structure. Many models have been used in order to take into account pier foundations influence although no reliable ones have been used to analyse the abutment performance. In this work two and three dimensional Boundary Element models in frequency domain have been proposed and dimensionless dynamic stiffness of standard bridge abutments have been obtained. Also, a simple analytical model of a short span bridge including inertial interaction effects of pier foundations and abutments has been presented in order to evaluate the response sensitivities to different soil-structure interaction variables.

\* \* \*

# La Aptitud al servicio de las Estructuras de Edificación Coloquio Internacional, Göteborg, Junio 1993

La IABSE ha publicado un volumen en el que se reproducen los textos de las Comunicaciones presentadas y discutidas en el coloquio Internacional, celebrado en Göteborg (Suecia), en junio del pasado año 1993.

La aptitud al servicio es la posibilidad que ofrece una estructura para satisfacer diversos requisitos y expectativas. Para el usuario de una estructura, el comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio es de gran importancia. Sin embargo, los ingenieros estructurales al juzgar una estructura se centran, principalmente, en cuestiones de seguridad y de capacidad de carga.

En esta publicación se exponen diversos criterios ingenieriles sobre la aptitud al servicio de las estructuras, comparándolos con el concepto clásico de fallo/seguridad aplicado a los problemas de seguridad estructural. Se publican 45 Artículos relacionados con los siguientes temas:

- Requisitos que debe satisfacer la aptitud al servicio de las estructuras.
- Conceptos y métodos de diseño.
- Cargas de servicio y modelos de cargas.
- Propiedades estructurales.

- Respuesta estructural bajo las cargas de servicio.

## DATOS DE ESTA PUBLICACION

### INFORME IABSE Volumen 69

45 Artículos en Inglés. Resúmenes en Inglés, Francés y Alemán.

342 páginas y 210 láminas. Formato 170 x 240 mm.

ISBN 3-85748-082-3. Publicación: Junio 1993.

Precio: Miembros de IABSE SFr. 64,-  
No Miembros SFr. 96,-  
Más gastos de envío.

Los interesados en adquirir este volumen deberán dirigirse a:

IABSE Secretariat  
EHT-Hönggerberg  
CH-8093 Zurich  
Télf.: Int + 41 1-633 26 47  
Fax: Int + 41 1-371 21 31